BICENTENARIO
EDUCATIVO

PARAGUAY TODOS Y TODAS

"Bicentenario de la Independencia Nacional: 1811 - 2011"

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CULTURA
Presidencia de la República del Paraguay

El Colegio, nuestro punto de encuentro

Material de distribución gratuita. Prohibida su venta

MODULO 1

Matemática

MÓDULO 1: TRIGONOMETRÍA

Campaña de Apoyo a la Gestión Pedagógica a Docentes y Directivos en Servicio - 2011

PARAGUAY TODOS Y TODAS

PARAGUAY BICENTENARIO

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CULTURA
Presidencia de la República del Paraguay

omapa
ORGANIZACIÓN MULTIDISCIPLINARIA DE APOYO A PROFESORES Y ALUMNOS

El Colegio, nuestro punto de encuentro

MODULO 1

Matemática

MÓDULO 1: TRIGONOMETRÍA

Campaña de Apoyo a la Gestión Pedagógica a Docentes y Directivos en Servicio - 2011

FICHA TECNICA

Presidente de la República
Fernando Lugo Méndez
Ministro de Educación y Cultura
Luis Alberto Riart Montaner
Viceministro de Educación para el Desarrollo Educativo
Héctor Salvador Valdez Alé
Viceministra de Educación para la Gestión Educativa
Diana Carolina Serafini Fernández
Directora General de Educación Media
Alcira Concepción Sosa Penayo
Directora de Bachillerato Científico
Ana Claudia Meza
Director de Bachillerato Técnico
Ramón Iriarte
Director Administrativo
Marcelo Esquivel
Coordinadora Unidad de Resignificación de la Educación Media:
Sara Raquel López Cristaldo
Elaboradoras:
Diana Giménez de von Lücken
Ingrid Wagener de Gauto

Reflexión final

En nuestras clases debemos tener siempre presente que la matemática es un lenguaje muy potente para comunicarse, por lo tanto, es de suma importancia que nuestros estudiantes manejen con soltura los símbolos, el vocabulario técnico y las definiciones de modo a seguir sin dificultades las instrucciones dadas en los trabajos.

La habilidad de saber seguir direcciones no solamente les será de utilidad en el área de las matemáticas, sino también en su vida cotidiana, además de fomentar el aprendizaje con responsabilidad propia.

Algunas propuestas que presentamos están basadas en trabajos grupales, por lo que es importante considerar ciertos aspectos de modo a lograr que éstas técnicas funcionen de manera eficiente. Por ejemplo, establecer tiempos de trabajo y cumplirlos, rotar los integrantes de los grupos, propiciar momentos de auto–evaluación y co-evaluación, definir claramente los objetivos y los procedimientos a seguir y coordinar en todo momento el trabajo.

Vale la pena destacar que no existe una fórmula ni receta para resolver problemas, así como no la hay para que un joven aprenda a nadar o a jugar fútbol o cualquier otro deporte. El desarrollo de destrezas y habilidades para realizar cualquier deporte, de manera aceptable, necesita un entrenamiento continuo y exigente. De igual manera, ”se aprende a resolver problemas simplemente resolviendo problemas”.

TALLER 19

En taller 19 se propone una actividad lúdica consistente en un rompecabezas. Puede servir como medio de fijación de los aprendizajes o evaluación de los mismos.

PROBLEMAS DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS.

La técnica a ser utilizada será la del rompecabezas.

Instrucciones para el profesor

Se construyen en cartulina dos grandes triángulos oblicuángulos iguales, que se subdividen en varios triángulos oblicuángulos más pequeños.

En uno de los triángulos se marcan de manera notoria las líneas divisorias (*).

En el otro triángulo, se recortan los triángulos más pequeños y se coloca en cada uno de ellos un problema de triángulos oblicuángulos, relacionado en lo posible con situaciones reales.

En el triángulo (*) se colocan las respuestas de los problemas que correspondan a cada figura recortada que tenga la misma forma.

El profesor distribuye los triángulos con los problemas en una mesa y cada estudiante pasa a buscar uno, lo resuelve y luego verifica su resultado ubicando la pieza sobre el triángulo (*).

Final de la jornada

Luego de haber compartido una larga jornada de trabajo, realicemos una reflexión final, para lo cual formamos grupos de 4 personas cada uno y reflexionamos acerca de la lectura que aparece a continuación. Luego de que cada integrante del grupo haya dado su opinión, escribimos un resumen de no más de 10 líneas de la jornada y lo entregamos a los facilitadores.

CAMPAÑA DE APOYO PEDAGÓGICO

"CONSTRUYENDO EXPERIENCIAS PEDAGÓGICAS CON DOCENTES DE LA EDUCACIÓN MEDIA"

PRESENTACION

El Colegio nuestro punto de encuentro, resume el desafío y la responsabilidad que como Dirección General de Educación Media venimos trabajando desde hace dos años. Tenemos la convicción de que sólo con un apoyo explícito y sostenido a los y las docentes del nivel concretaremos acciones que apunten a resignificar nuestra práctica pedagógica.

En los resultados educativos *"la situación mejoró menos de lo esperado porque las reformas llevadas a cabo no tuvieron suficientemente en cuenta a los docentes: quizás no se colocó en el centro de la agenda la cuestión del desarrollo profesional y personal de los docentes desde una perspectiva integral"* (Vaillant, 2005)

En el proceso de apoyo a la gestión pedagógica destinado a docentes en servicio iniciado en el 2010 con la "Campaña Nacional de Apoyo Pedagógico", se han abordado temáticas comunes para los y las docentes de todos los niveles. Las evaluaciones de la Campaña han sido relevantes y han servido para proponer el tratamiento de temas específicos por nivel, para dar respuestas a las históricas necesidades de cada uno de los niveles.

Ante este contexto y en cumplimiento del objetivo del Plan 2024 "*Mejorar la calidad de la educación en todos los niveles/modalidades educativos, atendiendo la diversidad y multiculturalidad*" y la acción definida como *"Fortalecimiento e innovación de los programas de formación continua en servicio de los educadores y las educadoras, acordes a las necesidades y prioridades de mejora del desempeño",* así como también abordando uno de los desafíos que nos planteamos desde la Educación Media enmarcados en **el Mejoramiento de la Práctica Docente**, desde las direcciones que pertenecen a la

Dirección General de la Educación Media, planteamos la concreción de encuentros pedagógicos con docentes del Nivel, de todo el país, para compartir experiencias pedagógicas y proponer la construcción de prácticas educativas pertinentes para el desarrollo de los saberes en los y las estudiantes de la Educación Media.

Estos encuentros entre colegas son considerados como los espacios propicios para capitalizar el aprendizaje colaborativo además de constituirse en la estrategia asumida por el MEC para acompañar el proceso de crecimiento profesional de los y las docentes atendiendo los siguientes objetivos:

- Propiciar espacios pedagógicos para diseñar experiencias de aprendizajes pertinentes que permita el desarrollo de las capacidades de los y las estudiantes de la Educación Media.
- Desarrollar experiencias de trabajo colaborativo entre profesores y profesoras del Nivel Medio que posibilite el mejoramiento de la gestión en aula.
- Fomentar la constitución de redes de docentes como estrategia de fortalecimiento de intercambios de buenas experiencias pedagógicas.

Esta propuesta, que se plantea para tres años forma parte de las diversas intervenciones que estamos llevando adelante para mejorar los niveles de aprendizaje de los y las estudiantes. Así, en el año 2011 se priorizan las disciplinas de **Matemática, Lengua Castellana y Literatura y Evaluación de los aprendizajes**, las razones que sostienen la selección se fundamentan en los informes del SNEPE, las Pruebas Nacionales a egresados del nivel en los años 2009 y 2010, cuyos resultados dan cuenta de la necesidad de priorizarlas para elevar el nivel de logros de aprendizaje. El tratamiento del eje de evaluación es considerada como una respuesta a las necesidades planteadas por los y las docentes para incorporar en las prácticas educativas bajo el paradigma de evaluación propuesto por el diseño curricular de la Educación Media.

2) Escribe la fórmula que permite calcular el área de un triángulo.

3) Reemplaza en dicha fórmula las expresiones que corresponden según tu gráfico.

4) ¿Cómo puedes escribir el valor de CD en relación a los datos conocidos y a alguna de las funciones trigonométricas estudiadas?

5) Sustituye la expresión del ítem 4) en el ítem 3).

6) Escribe la fórmula que has obtenido.

7) Escribe las otras dos fórmulas en función de los otros elementos del triángulo.

Conclusión
El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de las longitudes de dos lados del triángulo, por el seno del ángulo comprendido entre ellos.

$$\text{Area} = \frac{a\,b\,\text{sen}\,C}{2} \qquad \text{Area} = \frac{a\,c\,\text{sen}\,B}{2} \qquad \text{Area} = \frac{b\,c\,\text{sen}\,A}{2}$$

Conclusión

El cuadrado de la longitud de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados menos el doble producto de las longitudes de dichos lados por el coseno del ángulo comprendido entre ellos.

La relación en símbolos es

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos A \qquad b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos C$$

Para calcular los ángulos conociendo los tres lados se despeja el coseno de cualquiera de las tres fórmulas anteriores.

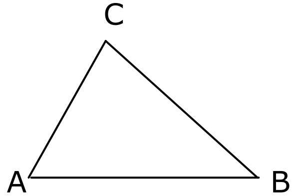
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c} \qquad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,a\,c} \qquad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,a\,b}$$

Área

TALLER 18

El taller 18 consiste en la deducción de las fórmulas para calcular el área de un triángulo a partir de las funciones trigonométricas y las relaciones de las mismas con los lados del triángulo, siguiendo pasos detallados hasta obtener las fórmulas buscadas.

1) En el triángulo de abajo se sabe que los lados miden a, b y c y los ángulos miden A, B y C respectivamente. Traza la altura CD.



Las demás áreas del Plan Común a ser abordadas en los siguientes años de implementación, son Ciencias Sociales y Ciencias Básicas y los ejes temáticos de Inclusión, y Adecuación Curricular; según las necesidades identificadas en el nivel.

Para la implementación del proyecto para el área de Matemática se contará con la colaboración de OMAPA (Organización Multidisciplinaria de Apoyo a Profesores y Alumnos), para Lengua y Literatura Castellana con la colaboración de UNIBE (Universidad Iberoamericana) organizaciones educativas referentes en la formación continua de los y las docentes, que en coordinación con el MEC llevarán adelante los encuentros de formación. Por último, el eje de Evaluación será desarrollado con los IFD (Institutos de Formación Docente) de gestión oficial del MEC.

La metodología asumida para los encuentros es la de ***talleres de reflexión de las prácticas y construcción de experiencias pedagógicas en colaboración*** con los y las colegas de la misma área fomentando el intercambio de experiencias, la identificación de problemas así como la resolución colectiva de los mismos.

Nos ratificamos que la formación de docentes debe ser pensada en relación con su práctica. Esto significa reconocerlos como profesionales, posicionar sus conocimientos y experiencias como saberes relevantes puestos a disposición de la discusión y el aprendizaje continuo para propiciar espacios de formación que respondan a sus intereses y a las necesidades del sistema educativo.

La formación continua es un derecho de los y las docentes porque constituye una de las piezas claves para la mejora educativa y se cimienta en el derecho a la educación de las y los jóvenes de nuestro país en la perspectiva de garantizarles posibilidades reales de aprendizajes que le permitan desarrollarse integralmente.

Sin dudas hay mucho por construir y condiciones que mejorar pero sabemos que como docentes nos sostenemos en la certeza de que aportar para la formación de las nuevas generaciones es la satisfacción más grande que nos motiva cotidianamente cuando nos detenemos en la mirada de cada alumno y alumna que nos ve como "su maestro", como "su maestra".

A modo de introducción

En esta jornada se destacarán tres momentos importantes que iniciaremos con la lectura individual de una Reflexión para luego realizar un intercambio grupal de opiniones. Un integrante de cada grupo escribirá las conclusiones de su grupo y las leerá en plenaria.

En un segundo momento de la jornada haremos un ejercicio importante de "juego de roles", en el que cada docente se pondrá en el lugar de "estudiante", pensará y trabajará como uno de ellos. Esta actividad es la más larga de la jornada y su importancia radica en que el docente pueda vivenciar las actividades propuestas.

El tercer y último momento nos llevará a una reflexión final, mediante la cual nosotros, los docentes de matemática, nos propondremos un compromiso personal para nuestra actividad docente.

REFLEXION

En el libro "Enseñar Matemáticas", del Dr. Claudi Alsina y otros, se expresa lo siguiente: "¿Por qué es necesario aprender (y por lo tanto enseñar) matemáticas? A la respuesta banal de "porque siempre se ha hecho" hay que añadir el convencimiento de que esta vieja rama del saber (jugando con un lenguaje natural, simbólico y gráfico y con una manera característica de razonar y deducir) ofrece una cultura cuantitativa, sin la cual sería imposible afrontar buena parte de los problemas que se han dado normalmente en la vida de una ciudadana o ciudadano. ¿Cuándo hay que aprender matemáticas? De hecho toda la vida, pero inexcusablemente durante los periodos educativos obligatorios. ¿Cómo se debe aprender y por lo tanto enseñar matemáticas?

3) Traza con línea de puntos la altura desde el vértice C, llama P al pie de la misma.
4) Establece como coordenadas del vértice C al par (x, y).
5) En función al ítem 4) escribe las coordenadas del punto P.
6) En base a los datos iniciales del triángulo, escribe las coordenadas del punto B.
7) Escribe las relaciones que representan el seno y el coseno del ángulo A en función al lado $\overline{AC}$ (b), "x" e "y". Reserva dicha información para utilizarla más adelante.
8) Escribe la fórmula de distancia para calcular la longitud del lado $\overline{BC}$ utilizando las coordenadas de los puntos B y C escritas en los ítems 4) y 6).
9) Desarrolla los cuadrados de los binomios y luego reemplaza los valores que correspondan a "x" e "y" según las relaciones obtenidas en el ítem 7).
10) Factoriza la expresión que sea necesaria para poder aplicar una de las fórmulas fundamentales estudiadas al principio del curso de manera a simplificar al máximo la expresión obtenida.
11) Escribe en el recuadro la fórmula para calcular al lado "a" del triángulo ABC.

12) ¿Cuáles serían las fórmulas para calcular los lados "b" y "c" del triángulo?

13) ¿Son aplicables las fórmulas encontradas en triángulos oblicuángulos obtusángulos? Justifica tu respuesta.
14) Si conoces las longitudes de los tres lados de un triángulo oblicuángulo ABC, ¿cuáles serían las fórmulas para calcular los ángulos A, B y C del triángulo?

4) Observa que los ángulos ADB y ACB son ángulos inscritos y éstos subtienden el mismo arco, por lo tanto son congruentes (tienen la misma medida).
5) Escribe la relación entre los senos de los ángulos ADB y ACB.
6) Teniendo en cuenta que el triángulo formado por los puntos A, B y D es rectángulo (recto en A), pues es un triángulo inscrito en una semicircunferencia, define el valor del seno del ángulo ADB en función al lado "c" y al diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo.
7) Escribe la relación obtenida en el ítem 6) en función al radio de la circunferencia.
8) Relaciona las fórmulas del ítem 8 de la **PARTE A** con el ítem 7) de la parte B) y escribe la relación que resulta.

Conclusión

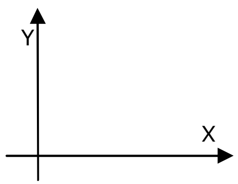
En todo triángulo, las longitudes de los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos, siendo la constante de proporcionalidad la longitud del diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

La relación en símbolos es: $\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C} = 2R$

Teorema del coseno.

TALLER 17

1) Recorta en una cartulina un triángulo oblicuángulo acutángulo cualquiera de vértices A, B y C y lados a, b y c respectivamente.
2) Apoya tu triángulo sobre el plano cartesiano que aparece a continuación, haciendo coincidir el lado $\overline{AB}$ con el eje "X" y el vértice A con el origen de coordenadas.



Ésta es la gran cuestión educativa y en cada época merece una respuesta específica. Es lo mismo que ocurre con la música. Las partituras y las notas son en ésta, como los números, los triángulos o las ecuaciones. Tendremos que dar vida a los conceptos y a los métodos para que el auditorio pueda disfrutar de los resultados. Y disfrutar quiere decir tener una vivencia y una capacidad de emoción. Hay personas que serán usuarias, otras serán grandes intérpretes y otras llegarán a la creación".

Tanto en la sociedad de hoy como en las antiguas civilizaciones, la matemática ocupa y ha ocupado un lugar preponderante y es uno de los más importantes contribuyentes al progreso de la cultura. Esta ciencia ha figurado siempre como parte fundamental en todo sistema educativo. El ser humano ha necesitado siempre del conocimiento matemático, desde algo tan simple como es contar. Con el tiempo, el hombre se ocupó de las estructuras espaciales y así se da inicio a la geometría. Muchos años han tenido que pasar, y la necesidad de dar respuesta a los cambios en el tiempo, hacen surgir el análisis matemático y buscando dar respuesta a lo incierto, aparecen la probabilidad y la estadística, convirtiéndose así las ciencias matemáticas hoy en día en una de las disciplinas más fuertes de la sociedad.

La matemática que necesitan las personas del mundo actual deben ser una amalgama de matemática pura y aplicada, es decir, que es importante tener en cuenta la misma filosofía del pensamiento matemático, así como los cálculos y que ninguno de ellos es más importante que el otro. La importancia de considerar esa amalgama, es que la vida es a la vez, pensamiento y acción, y por lo tanto nos exige razonar y actuar.

El Dr. Santaló en su libro "Enseñanza de la Matemática en la Escuela Media" dice: "Muchas veces se ha alertado sobre los peligros de la intuición en la matemática, peligros que realmente existen y pueden llevar a resultados falsos si no se tiene cuidado con ellos. Pero el hecho de que la intuición sea peligrosa no quiere decir que deba excluirse de la enseñanza de la matemática. Al contrario, debe aprovecharse para simplificar y ayudar al aprendizaje”

Muchas veces, los estudiantes esperan que los docentes les propongamos problemas con soluciones exactas, lo que no ocurre en la vida cotidiana, pues los resultados a los problemas cotidianos vienen cargados de un gran potencial de aproximación. Nuestros estudiantes deben aprender a probar y a demostrar, pero también es importante que aprendan a intuir. Sin embargo, no deben quedarse solamente en la intuición, sino que deben ir más allá, esto es, ser capaces, como dijimos anteriormente, de demostrar matemáticamente las soluciones a las situaciones propuestas, y es en ese momento en el que el docente debe resaltar como guía a lo largo del camino para llegar a una meta final.

Nuestro trabajo como docentes de matemática es de suma importancia en la formación de los jóvenes paraguayos, ya que está en nuestras manos no solamente enseñarles contenidos, sino que enseñarles a pensar. Pero, los resultados obtenidos en las últimas pruebas del SNEPE, nos están diciendo a gritos que probablemente no estemos haciendo el trabajo tal y como nuestros jóvenes lo necesitan.

A continuación se presentan los niveles de desempeño en Matemática según la prueba del SNEPE en la que se han tenido en cuenta cuatro niveles que se explican a continuación:

Nivel 0

Indica que los estudiantes ubicados en este grupo no demuestran tener un manejo de los contenidos que les permitan resolver siquiera las tareas de nivel 1.

Teorema del seno.

TALLER 16

Para los talleres 16 y 17, se proponen actividades manuales que permitan demostrar el teorema del seno y del coseno a partir del trabajo con materiales concretos, siguiendo instrucciones claras y precisas que lleven a la elaboración de conclusiones.

PARTE A

1) Recorta en una cartulina un triángulo oblicuángulo acutángulo (no equilátero ni isósceles) y nombra a sus vértices con las letras A, B y C.
2) Traza la altura relativa a los tres vértices y nómbralas como h_A, h_B y h_C respectivamente.
3) Traza una recta en tu hoja y apoya el lado $\overline{AB}$ del triángulo sobre ella.
4) Escribe el valor del seno de $\hat{A}$ y del seno de $\hat{B}$ en función de los lados $\overline{AC}$, $\overline{CB}$ y la altura h_C.
5) Despeja de cada una de las fórmulas el valor de h_C.

6) Recuerda la propiedad transitiva de la igualdad que dice **“dos cantidades iguales a una tercera, son iguales entre sí”**. Aplícala para tus resultados del ítem 5). Escribe tu conclusión.
7) Ahora repite el proceso desde el ítem 3) hasta el 6), pero apoyando el lado $\overline{AC}$ sobre la recta.
8) compara tus resultados de los ítems 5) y 6) y escribe la relación general que permite comparar los lados del triángulo y los senos de los ángulos opuestos a los mismos.

PARTE B (opcional)

1) Construye una circunferencia y traza en ella un triángulo inscrito ABC (sus vértices deben ser puntos de la circunferencia).
2) Traza un diámetro $\overline{BD}$.
3) Resalta con colores diferentes los ángulos ADB y ACB.

El objetivo de esta técnica es que los estudiantes repasen las fórmulas estudiadas, afiancen sus conocimientos, compartan con sus compañeros y se autoevalúen.
Al final del trabajo, cada alumno deberá completar una tablita en la que indica cuáles de todas las identidades propuestas en el día ha podido demostrar.
La actividad se podría desarrollar en más de una sesión de clases.
Este tipo de actividades promueve la autoevaluación del estudiante, de manera que éste tome conciencia de lo que aún debe estudiar antes de ser evaluado.

Ecuaciones trigonométricas

TALLER 15

El taller 15 puede servir al docente como medio de evaluación de los aprendizajes.

La actividad propuesta consiste en cédulas individuales. Cada una de las mismas tiene una valoración diferente según la dificultad del ejercicio. La puntuación va de 1 a 3.
Los estudiantes pueden escoger libremente cualquiera de las cédulas, teniendo en cuenta lo dicho anteriormente.
La tarea consiste en que resuelvan ejercicios hasta acumular 10 puntos.
Esta técnica permitirá a los estudiantes trabajar con ejercicios según su propia capacidad, teniendo en cuenta que muchas veces los alumnos más dotados se cansan y fastidian con ejercicios muy simples y a los que tienen más dificultad les resulta muy pesado trabajar con ejercicios de mucha complejidad.
Al momento de realizar la evaluación sobre este contenido, se puede tener en cuenta qué tipo de ejercicios ha elegido cada alumno y se le evalúa según sus propias condiciones.

Nivel 1 (Reproducción y procedimientos)

Los estudiantes ubicados en el nivel 1 demuestran que son capaces de reproducir los ejercicios que son familiares y que exigen básicamente la reiteración de los conocimientos practicados, como son las representaciones de hechos y problemas comunes, recuento de objetos y propiedades matemáticas conocidas, reconocimiento de equivalencias, aplicación de algoritmia, manejo de expresiones con símbolos, fórmulas y la realización de operaciones sencillas.

Nivel 2 (Conexión e integración de datos para resolver problemas de menor complejidad)

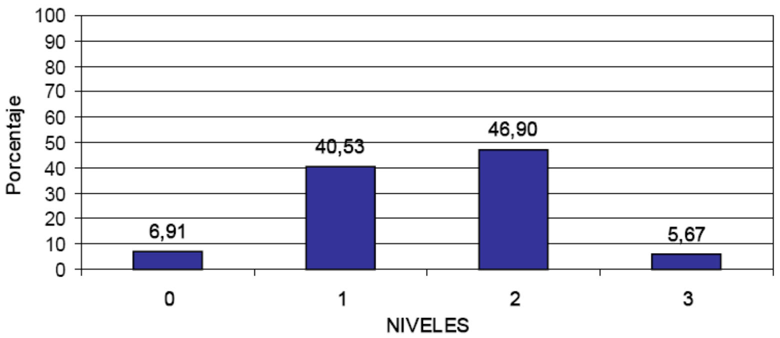
En este nivel, los estudiantes son capaces de resolver problemas situados en contextos familiares o cercanos.

Los planteamientos exigen una mayor compresión, requieren establecer relaciones entre distintas representaciones de una misma situación y enlazar diferentes aspectos que involucren las operaciones básicas en la resolución de problemas aplicados a situaciones simples, empleando conceptos de relaciones, funciones, propiedades, notación y vocablos matemáticos.

Nivel 3 (Inferencia y modelización de estrategias eficaces para resolver problemas de mayor complejidad)

Los estudiantes ubicados en este nivel, requieren interpretación y reflexión para comprender conceptos procedimientos matemáticos de algebra y geometría analítica, utilizar los conocimientos del área y relacionar con los que provienen de la vida cotidiana. Las tareas presentan mayor complejidad, que requieren la interpretación de situaciones reales, es decir, comprensión de la situación, creación, modificación y adaptación de modelos de resolución de problemas para seleccionar, organizar e interpretar la información a partir de la situación encontrada, y utilizar con precisión estrategias en el planteo de alternativas de solución pertinentes en contextos varios.

De los 12 338 estudiantes evaluados, el nivel de logro es el que se presenta en el gráfico de abajo.



Ver Informe de resultado de la Educación Media 2006

En el intento de mejorar el nivel de matemática en nuestro país, el Ministerio de Educación y Cultura brinda durante el presente año espacios para la discusión acerca de los contenidos y metodologías que estamos empleando en nuestras salas de clase, y aprovechando esta oportunidad, deberíamos preguntarnos si seguimos siendo los docentes de tiza y pizarrón, o somos innovadores y críticos de nuestro propio accionar en la sala de clases. También deberíamos cuestionarnos, si nos dejamos llevar por el "así ya está bien" o siempre estamos en la búsqueda de nuevos caminos para que nuestros estudiantes puedan comprender con mayor facilidad lo que tratamos de transmitirles. ¿Somos abiertos a la realidad de los jóvenes actuales?, sabiendo que para ellos el mundo se mueve muy rápido, o ¿pretendemos que ellos se suban a nuestro mundo?, lento y como ellos mismos muchas veces lo manifiestan: "aburrido".

$$\text{sen } A + \text{sen } B = 2\ \text{sen}\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\text{sen } A - \text{sen } B = 2\cos\frac{A+B}{2}\text{sen}\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2\ \text{sen}\frac{A+B}{2}\text{sen}\frac{A-B}{2}$$

Identidades Trigonométricas

TALLER 14

Para la realización de este taller es importante que los estudiantes manejen con seguridad todas las fórmulas estudiadas anteriormente.

Se puede trabajar con identidades trigonométricas desde el inicio del curso, es decir, desde el momento en que se han demostrado las primeras fórmulas fundamentales.
En este taller proponemos trabajar con fichas numeradas. Cada estudiante retira una ficha con un número, en la que aparece un solo miembro de la identidad que debe demostrar. Dos estudiantes tendrán fichas con el mismo número y deberán reunirse para armar la identidad que deberán demostrar.
Una vez que las personas que tienen el mismo número se encuentran, empiezan a trabajar en la identidad que les ha correspondido.
Una vez terminado el trabajo, deben pasar a buscar otra tarjeta numerada, pero no pueden trabajar nuevamente con el mismo compañero.

2) Suma las expresiones (1) y (2):____

3) Resta (2) de (1):
____

4) Suma las expresiones (3) y (4):
____

5) Resta (4) de (3):____

6) En las fórmulas anteriores reemplaza "a+ b" por "A" y "a - b" por "B" y luego despeja "a" y "b" de cada una de ellas, asi los valores de de "a" y "b" son:

a =	b =

7) En las fórmulas obtenidas en 2), 3), 4) y 5) sustituye los valores de "a+b", "a – b", "a" y "b", por los que correspondan en términos de A y B.

8) Escribe en los recuadros de abajo las fórmulas obtenidas

METODOLOGÍA DE LOS CURSOS

En base a los resultados de las pruebas nacionales se ha considerado conveniente discutir en estas jornadas, los siguientes contenidos: Trigonometría, Matrices y Determinantes, Análisis Combinatorio, Geometría Analítica y Cálculo, empleando diferentes metodologías que sean aplicables en cualquier punto del país según su propia realidad social y económica.

Todos los cursos serán enfocados como talleres y el objetivo es que los talleres desarrollados por los docentes en las jornadas de capacitación puedan ser utilizados en el aula directamente o con modificaciones introducidas por cada docente, dependiendo de la cantidad de alumnos por aula, del interés que despiertan los mismos en las clases, de las capacidades individuales de los estudiantes, etc.

Se proponen en las jornadas diferentes técnicas para el proceso enseñanza – aprendizaje. Entre las técnicas propuestas, está el uso de fichas de trabajo, las cuales pueden ser empleadas de diferentes maneras y el uso de las mismas se podrá vivenciar en las jornadas.

La metodología propuesta para las jornadas pretende encaminar hacia el aprendizaje constructivista, buscando la autogestión de los docentes primero y luego de sus estudiantes, para que el estudiante construya su propio conocimiento y se apropie de los conceptos estudiados, poniéndolos luego en práctica en la resolución de ejercicios y fundamentalmente de situaciones problemáticas.

En cada encuentro se trabajará con contenidos específicos y diferentes técnicas, atendiendo los intereses de los docentes de todo el país en cuanto a contenido y metodología se refiere. Estamos convencidos de que una buena formación general es beneficiosa para docentes y estudiantes, y es por ello que todos los docentes que participen de estas jornadas, trabajarán con contenidos del primero, segundo y tercer curso de la educación Media, aunque no sea éste el curso que esté desarrollando en el presente año lectivo, ya que debemos conocer con suficiencia los contenidos que desarrollan nuestros estudiantes en cursos anteriores y posteriores a los que enseñamos.

Con estos talleres se pretende establecer un conjunto de agentes multiplicadores de la metodología dentro de nuestro país, para que no quedemos fuera del contexto internacional en lo que a metodologías se refiere, e intentar mejorar la instrucción matemática en nuestro entorno.

b) Escribe la fórmula del coseno de arco doble, cos 2 x = $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$, pero reemplazando "2x" por "a" y por lo tanto "x" por $\frac{a}{2}$.

(2)

c) Resta (2) de (1) y luego despeja el valor de "sen $\frac{a}{2}$".

La fórmula obtenida es:

d) Suma (1) y (2) y luego despeja el valor de "cos $\frac{a}{2}$"

La fórmula obtenida es:

e) Utilizando los resultados obtenidos en c) y d), deduce las fórmulas para calcular tg $\frac{a}{2}$ y cotg $\frac{a}{2}$

Transformación en producto.

TALLER 13

1) Escribe en los recuadros de abajo en estricto orden, las fórmulas de sen (a +b), sen (a - b), cos (a+ b) y cos (a − b).

(1)

(2)

(3)

(4)

pero las fórmulas son sin embargo válidas para arcos en cualquiera de los cuatro cuadrantes.

TALLER 12

A los talleres 12 y 13 les precede la clase teórica relativa a las funciones trigonométricas de suma y diferencia de arcos.

En todos los talleres propuestos y muy especialmente en éstos, es importante que el profesor cree conciencia en sus estudiantes de la necesidad de estudiar y repasar las lecciones constantemente para darle buen seguimiento a las actividades de clase, muy enfocadas al trabajo en espiral.

1) A partir de las fórmulas de sen (a + b), cos (a + b), sen (a - b) y cos (a - b), deduce:
a) las fórmulas para tg (a + b) y tg (a - b).
b) las fórmulas para cotg (a + b) y cotg (a - b).

2) Haciendo a = b en cada una de las fórmulas que proporcionan el seno, coseno, tangente y cotangente de "a + b", deduce las fórmulas para calcular:
a) sen (2 a) b) cos (2 a) c) tg (2 a) d) cotg (2 a)

3) En este apartado podrás deducir las fórmulas para calcular el seno, el coseno, la tangente y la cotangente del arco medio, esto es, de $\frac{a}{2}$. Sigue las instrucciones que aparecen a continuación:
a) Escribe la relación fundamental $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ en términos del arco $\frac{a}{2}$.

(1)

Definición de funciones trigonométricas

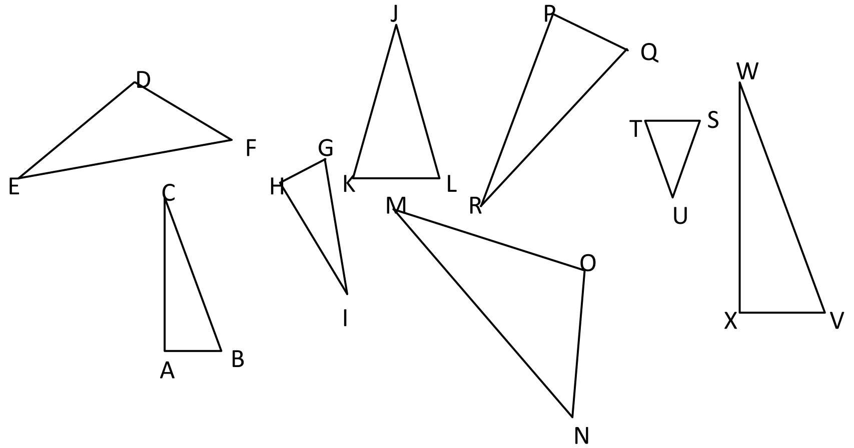
TALLER 1

Con el taller 1 se pretende construir la definición de cada una de las funciones trigonométricas a partir de la semejanza de triángulos rectángulos.
Los estudiantes descubren por sí mismos los conceptos siguiendo instrucciones claras y precisas.
Con la utilización de las fichas se trabaja la capacidad de seguir paso a paso direcciones y llegar al objetivo final como premio al esfuerzo realizado.

Recordemos que dos triángulos son semejantes si tienen sus tres ángulos congruentes (igual medida) y sus lados homólogos son proporcionales.

PARTE A

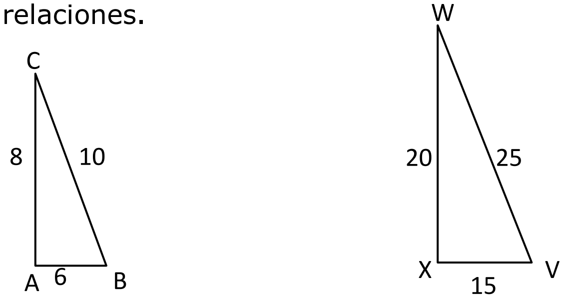
1) Determina cuáles de los triángulos que aparecen más abajo son **SEMEJANTES** (es decir, que tienen ángulos de la misma medida y sus lados correspondientes u homólogos son proporcionales).



Considera una pareja de **triángulos rectángulos semejantes** que has encontrado y escribe todas las relaciones de proporcionalidad posibles, usando una notación general para nombrar los lados de cada triángulo (esto es, mediante las letras en sus vértices).

2) ¿Cuántas relaciones has encontrado?______________
3) Compara con tu compañero de al lado si han encontrado las mismas relaciones.

PARTE B



4) Copia la relación que resulta de dividir la longitud del cateto opuesto al ángulo "B" y la hipotenusa en el primer triángulo y haz lo mismo con el segundo triángulo, pero considerando el ángulo "V".
5) Ahora reemplaza por el valor correspondiente a la longitud de dichos lados.
6) ¿Qué puedes concluir al respecto?

Al número real que acabas de encontrar se le llama **seno del ángulo** (esto es, seno de B en el primer caso y seno de V en el segundo caso).

7) Copia la relación que resulta de dividir la longitud del cateto adyacente al ángulo "B" y la hipotenusa en el primer triángulo y haz lo mismo con el segundo triángulo, pero considerando el ángulo "V".
8) Ahora reemplaza por el valor correspondiente a la longitud de dichos lados.
9) ¿Qué puedes concluir al respecto?

Al número real que acabas de encontrar se le llama **coseno del ángulo.**

La paralela a $\overline{AA'}$ trazada por el punto D corta al segmento $\overline{PM}$ en el punto F.
La paralela a $\overline{BB'}$ trazada por el punto D corta al eje "X" en el punto G, quedando determinado de ese modo el paralelogramo FDGM.
Podemos así escribir las siguientes relaciones:
PM = PF + FM = PF + DG (1)
PF = PD. cos a = sen b . cos a (2)
DG = OD. sen a = cos b . sen a (3)
Al reemplazar las relaciones (2) y (3) en (1) nos queda:
PM = sen a . cos b + cos a . sen b, o sea que

sen (a + b) = sen a .cos b + cos a.sen b

OM = OG - MG = OG – FD (4)
OG = OD. cos a = cos b . cos a (5)
FD = PD. sen a = sen b . sen a (6)
Al reemplazar las relaciones (5) y (6) en (4) nos queda:
OM = cos a . cos b - sen a . sen b, o sea que

cos (a + b) = cos a .cos b – sen a. sen b

Recordemos que sen (- a) = - sen a (es decir, sen a = - sen (- a)) y cos (- b) = cos b, entonces
sen (a - b)= sen (a+(-b))= sen a cos (-b) + cos a sen (-b)= sen a cos b - cos a sen b
cos (a - b)= cos (a+(-b))= cos a cos (-b) - sen a sen (- b)= cos a cos b + sen a sen b

sen (a - b) = sen a .cos b - cos a.sen b

cos (a - b) = cos a .cos b + sen a. sen b

Destaquemos que hemos demostrado las fórmulas para el seno y el coseno de "a + b", con "a" y "b" del primer cuadrante,

Relaciones entre las funciones trigonométricas de ángulos positivos y negativos

sen (-a) = - sen a; cos (-a) = cos a; tg (-a) = - tg a;
cotg (-a)= - cotg a; sec (-a) = sec a; cosec (-a) = -cosec a

En caso que el arco sea mayor que un giro, se divide el arco dado entre 360, y el resto de la división se reduce al primer cuadrante.

En caso que el arco sea negativo y mayor que un giro, se le suma el múltiplo de 360^0 necesario para obtener un arco que tenga el mismo extremo pero sea positivo.

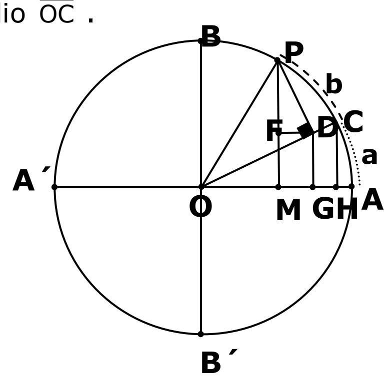
Funciones Trigonométricas de suma, diferencia, arco doble y arco medio.

Queremos determinar las funciones trigonométricas de "a+b", siendo a y b dos arcos.

Para la demostración de la fórmula, consideremos una circunferencia de centro O y radio 1, en la cual C es el extremo del arco "a" y "b" es el arco con extremos en los puntos C y P. El segmento $\overline{PD}$ es perpendicular al radio $\overline{OC}$.

En base a la figura podemos escribir las siguientes relaciones:

sen (a+b)=PM
cos (a+b)=OM
sen a=CH
cos a=OH
sen b=PD
cos b=OD



10) Copia la relación que resulta de dividir el cateto opuesto al ángulo "B" y el cateto adyacente a dicho ángulo del triángulo y haz lo mismo con el segundo triángulo, pero considerando el ángulo "V".
11) Ahora reemplaza por el valor correspondiente a la longitud de dichos lados.
12) ¿Qué puedes concluir al respecto?

Al número real que acabas de encontrar se le llama **tangente del ángulo.**

13) Procede de manera análoga a los tres casos anteriores, pero divide la hipotenusa entre los catetos (opuesto y adyacente) y el cateto adyacente entre el opuesto.

Los números reales obtenidos reciben el nombre de **cosecante, secante y cotangente del ángulo.**

Conclusión
Se definen las seis funciones trigonométricas del ángulo α de la siguiente forma:

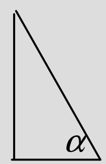
$$\text{seno } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{coseno } \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tangente } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

$$\text{cotangente } \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$$

$$\text{secante } \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$$



PARTE B

14) Realiza ahora todo el proceso anterior con el otro ángulo agudo de cada triángulo.
15) Compara los resultados obtenidos en las partes A y B teniendo en cuenta que los ángulos agudos de todo triángulo rectángulo son complementarios (es decir, la suma de sus medidas es igual a 90º).
16) Escribe tu conclusión.

Conclusión
El **seno de un ángulo** es igual al **coseno de su complemento** y recíprocamente, el coseno de un ángulo es igual al seno de su complemento.

La **tangente de un ángulo** es igual a la **cotangente de su complemento** y recíprocamente, la cotangente de un ángulo es igual la tangente de su complemento.

La **secante de un ángulo** es igual a la **cosecante de su complemento** y recíprocamente, la cosecante de un ángulo es igual a la secante de su complemento.

En símbolos
Si x e y son ángulos complementarios, entonces:
sen x = cos (90º - x) = cos y; cos x = sen (90º - x) = sen y
tg x = cotg (90º - x) = cotg y; cotg x = tg (90º - x) = tg y
sec x = cosec (90º - x) = cosec y; cosec x = sec (90º - x) = sec y

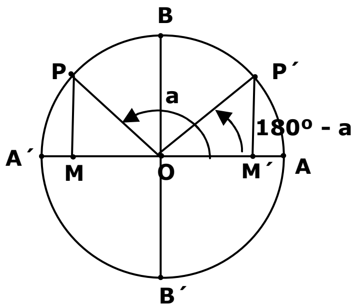
4) Utilizando el gráfico anterior se puede también encontrar una relación entre los ángulos que giran en sentido horario, considerados negativos, por girar en sentido contrario a los demás. Escribe las relaciones entre las funciones trigonométricas de dichos ángulos.

sen a = _______________	cotg a = _______________
cos a = _______________	sec a = _______________
tg a = _______________	cosec a = _______________

Conclusión
Relaciones entre las funciones trigonométricas de ángulos del II y I cuadrante ("a" del II cuadrante).
sen a = sen (180^0 – a); cos a = - cos (180^0 – a);
tg a = - tg (180^0 – a);
cotg a = - cotg (180^0 – a); sec a = - sec (180^0 – a);
cosec a = cosec (180^0 – a)

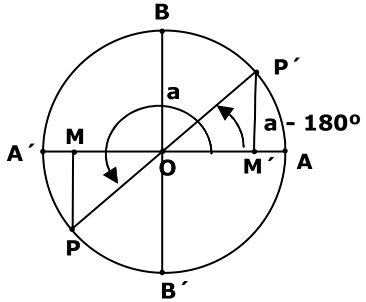
Relaciones entre las funciones trigonométricas de ángulos del III y I cuadrante. ("a" del III cuadrante).
sen a = - sen (a - 180^0); cos a = - cos (a - 180^0);
tg a = tg (a - 180^0);
cotg a= cotg (a - 180^0); sec a = - sec (a - 180^0);
cosec a = - cosec (a - 180^0)

Relaciones entre las funciones trigonométricas de ángulos del IV y I cuadrante ("a" del IV cuadrante).
sen a = - sen (360^0 – a); cos a = cos (360^0 – a);
tg a = - tg (360^0 – a);
cotg a = - cotg (360^0 – a); sec a = sec (360^0 – a);
cosec a = - cosec (360^0 – a)



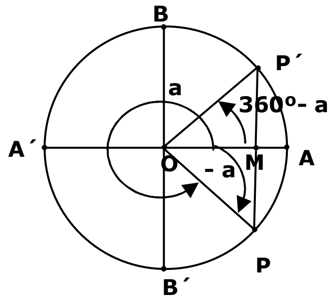
sen a = _______________
cos a = _______________
tg a = _______________
cotg a = _______________
sec a = _______________
cosec a = _______________

2) Utilizando el gráfico de abajo, donde "a" representa un arco del tercer cuadrante y P(x, y) es el extremo de dicho arco, completa el cuadro para relacionar las funciones trigonométricas de ángulos del tercer y primer cuadrante.



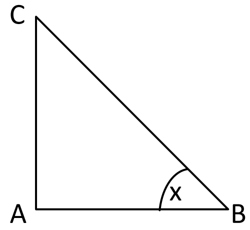
sen a = _______________
cos a = _______________
tg a = _______________
cotg a = _______________
sec a = _______________
cosec a = _______________

3) Utilizando el gráfico de abajo, donde "a" representa un arco del cuarto cuadrante y P(x, y) es el extremo de dicho arco, completa el cuadro para relacionar las funciones trigonométricas de ángulos del cuarto y primer cuadrante.



sen a = _______________
cos a = _______________
tg a = _______________
cotg a = _______________
sec a = _______________
cosec a = _______________

17) Dado el triángulo de abajo, escribe en el cuadro 1, las seis funciones trigonométricas correspondientes al ángulo "x" en función a las medidas de los lados $\overline{AB}, \overline{AC}$ y $\overline{BC}$ del triángulo y luego, en el cuadro 2 realiza las multiplicaciones indicadas. Escribe tu conclusión.



Cuadro 1	Cuadro 2
sen x =	sen x. cosec x =
cos x =	cos x . sec x =
tg x =	tg x . cotg x =
cotg x =	
sec x=	
cosec x =	

Conclusión

- Como sen x .cosec x = 1, entonces $\operatorname{sen} x = \frac{1}{\operatorname{cosec} x}$ y $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$ y decimos que las funciones seno y cosecante son recíprocas.
- Como cos x .sec x = 1, entonces $\cos x = \frac{1}{\sec x}$ y $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ y decimos que las funciones coseno y secante son recíprocas.
- Como tg x .cotg x = 1, entonces $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{cotg} x}$ y $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ y decimos que las funciones tangente y cotangente son recíprocas.

TALLER 2

Continuando con la misma metodología que se ha empleado en el taller 1, con este taller se pretende que el estudiante deduzca las primeras fórmulas fundamentales que permiten relacionar las funciones trigonométricas definidas en el taller anterior.

Al utilizar los conocimientos adquiridos en el taller anterior y en cursos anteriores, se potencia el trabajo en espiral, que consiste en reutilizar conocimientos ya adquiridos y de esta manera afianzarlos aún más.

seno, hacer que los estudiantes concluyan que **el valor del coseno de los ángulos del II cuadrante es opuesto al de su suplemento.**

10) En base a las relaciones que ligan las funciones trigonométricas, hacer que los estudiantes completen el siguiente cuadro.

a) Si “x” es un ángulo del segundo cuadrante, entonces (180º-x) es del ____________ cuadrante.
b) sen x = ______________
c) cos x = ______________
d) tg x = ______________
e) cotg x = ______________
f) sec x = ______________
g) cosec x = ____________

TALLER 11

Con el taller 11 se pretende encontrar la relación entre las funciones trigonométricas en los cuatro cuadrantes y la relación que existe entre los valores de las funciones en el II, III y IV cuadrantes con respecto al I.

Los estudiantes descubren por sí mismos las relaciones siguiendo instrucciones claras y precisas presentadas en la ficha.

Reducción al primer cuadrante

En la figura de abajo, considera un arco “a” , cuyo extremo P(x, y) está en el segundo cuadrante y el punto P´(x´,y´), simétrico del punto P respecto al eje Y está en el primer cuadrante y es el extremo del arco 180º - a.

1) Utilizando el gráfico de abajo y los resultados obtenidos en el taller 10, completa el siguiente cuadro de modo que queden relacionadas las funciones trigonométricas de los ángulos del segundo y primer cuadrante.

PARTE B

En esta parte del taller podrás relacionar los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos del II, III y IV cuadrante con los valores de las funciones trigonométricas de ángulos en el I cuadrante.

1) Observa los resultados que obtuviste en la **PARTE A** del **TALLER 9** y los resultados que obtuviste en la **PARTE A** de este taller, en relación a los signos de las funciones trigonométricas en los cuatro cuadrantes.

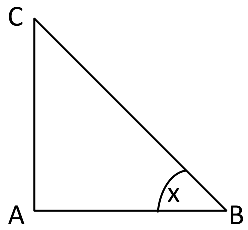
2) Une con flecha lo que corresponda, según las instrucciones del ítem 1

sen 150º	sen 45º
cos 240º	cos 30º
sen 300º	cos 60º
cos 135º	- sen 60º
sen 225º	- cos 45º
cos 315º	- sen 45º
sen 240º	- cos 30º
cos 330º	- cos 60º

Instrucciones para el profesor

1) Dibujar en el suelo una circunferencia cuyo radio mida 1m.
2) Marcar un ángulo de 150º.
3) Trazar los segmentos que representan al seno y al coseno del ángulo.
4) Hacer notar a los estudiantes que al ángulo trazado le faltan 30º para ser un ángulo de 180º.
5) Marcar ahora en la misma circunferencia un ángulo de 30º.
6) Hacer notar a los estudiantes que la longitud del segmento que representa el seno del ángulo de 30º es igual a la longitud del segmento que representa el seno del ángulo de 150º.
7) Proceder de igual modo con ángulos de 135º y 45º, y con ángulos de 120º y 60º.
8) Los alumnos deben concluir que **el valor del seno de los ángulos en el segundo cuadrante son iguales a los de su suplemento en el I cuadrante.**
9) Trabajando ahora con los segmentos que representan el coseno de un ángulo, de forma análoga a lo realizado para el

1) Dado el triángulo de abajo, escribe las seis funciones trigonométricas correspondientes al ángulo "x" en función a los lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ del triángulo.



2) Aplica el teorema de Pitágoras al triángulo anterior y en el recuadro de abajo, escribe la relación encontrada.

3) Divide cada miembro de la expresión anterior entre BC^2.

4) Recuerda que la potenciación es distributiva con respecto al cociente, es decir que $m^2/n^2 = (m/n)^2$. Escribe en el recuadro de abajo la relación que resulta.

5) Observa las relaciones que escribiste en el ítem 1) y sustitúyelas en donde correspondan en el ítem 4). Escribe tu conclusión en el recuadro.

6) Verifica tu respuesta del ítem 5) con la que se encuentra en la mesa del (la) profesor(a).
7) Si tu respuesta es incorrecta, verifica los pasos que realizaste desde el ítem 1). Si tu respuesta es correcta, continúa con el ítem 8).

8) Realiza el proceso análogo a partir del ítem 3) hasta el 7), pero ahora divide la relación entre AB^2 y luego entre AC^2 en cada uno de los recuadros de abajo y escribe la conclusión. Luego compara tus respuestas con la hoja de la mesa del (la) profesor(a).

Recuerda que el valor de una fracción no varía si el numerador y el denominador se dividen por una misma cantidad.

9) Según el ítem 1) tg x = AC/ AB, entonces, ¿cuál debe ser el divisor del numerador y del denominador, para obtener una relación entre la tangente, el seno y el coseno de x? ___________________

10) Escribe la relación resultante.

11) Realiza el procedimiento análogo al del ítem 9 para obtener la relación entre la cotangente, el seno y el coseno de x, y escríbela en el recuadro.

2) Escribe una conclusión acerca de los valores que pueden tomar las funciones trigonométricas en la circunferencia trigonométrica.

Conclusión

	I	II	III	IV
Seno	+	+	-	-
Coseno	+	-	-	+
Tangente	+	-	+	-
Cotangente	+	-	+	-
Secante	+	-	-	+
cosecante	+	+	-	-

Regla nemotécnica: las funciones trigonométricas y sus recíprocas son positivas en los cuadrantes I (**todos)** II (**sin**) III (**ta**) IV (**cos**).

Los valores de los arcos notables de 0º, 90º, 180º, 270º y 360º son los que aparecen en la tabla de abajo

	0º	**90º**	**180º**	**270º**	**360º**
Seno	0	1	0	-1	0
Coseno	1	0	- 1	0	1
Tangente	0	No existe	0	No existe	0
Cotangente	No existe	0	No existe	0	No existe
Secante	1	No existe	-1	No existe	1
cosecante	No existe	1	No existe	-1	No existe

Se puede afirmar que en la circunferencia trigonométrica

$-1 \leq \text{sen } \alpha \leq 1$; $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$; $-\infty < \text{tg } \alpha < \infty$;

$-\infty < \text{cotg } \alpha < \infty$

$\sec \alpha \leq -1$ *o* $\sec \alpha \geq 1$; $\text{cosec } \alpha \leq -1$ *o* $\text{cosec } \alpha \geq 1$

TALLER 10

En el taller 10 se hace uso nuevamente de la técnica del espiral recogiendo conclusiones anteriores obtenidas en los talleres 1 y 9. Se realiza una actividad lúdica, detallando las instrucciones para el profesor.

PARTE A

A partir de lo trabajado en el **TALLER 9**, determinaremos los signos de las funciones trigonométricas en los cuatro cuadrantes.

Considera que los segmentos verticales que quedan por encima del eje de abscisas tienen valor positivo y los que quedan por debajo tienen valor negativo. Además, considera, que los segmentos horizontales a la derecha del eje de ordenadas son positivos y los que están a la izquierda son negativos.

En base a los **TALLERES 1 y 9**, completa el siguiente cuadro de signos para las funciones trigonométricas en los cuatro cuadrantes.

	I	II	III	IV
Seno				
Coseno				
Tangente				
Cotangente				
Secante				
cosecante				

PARTE B

1) Utilizando el TALLER 9 y la parte A de este taller, completa la siguiente tabla. Debes recordar que el divisor nunca puede ser cero (la división por cero no está definida).

	0º	90º	180º	270º	360º
Seno					
Coseno					
Tangente					
Cotangente					
Secante					
cosecante					

Conclusión

Las fórmulas fundamentales son:

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ $\quad\quad$ $\sec^2 x = 1 + \text{tg}^2 x$

$\text{cosec}^2 x = 1 + \text{cotg}^2 x$

$\text{tg } x = \dfrac{\text{sen } x}{\cos x}$ $\quad\quad$ $\text{cotg } x = \dfrac{\cos x}{\text{sen } x}$

TALLER 3
EJERCICIOS DE APLICACIÓN DE LAS FÓRMULAS FUNDAMENTALES

La técnica del taller 3 consiste en distribuir problemas o ejercicios en espacios a los que se llaman islas. Pequeños grupos de personas van rotando y resolviendo la actividad propuesta en la isla que le corresponde. Cuando todos los grupos han visitado cada una de las islas, se presentan en plenaria los resultados obtenidos por cada uno de los grupos en la última isla que le tocó visitar, de modo a evaluar y debatir con respecto a los mismos.

Los problemas para este taller son elegidos por el docente según el momento en que se aplicará la técnica.

TALLER 4

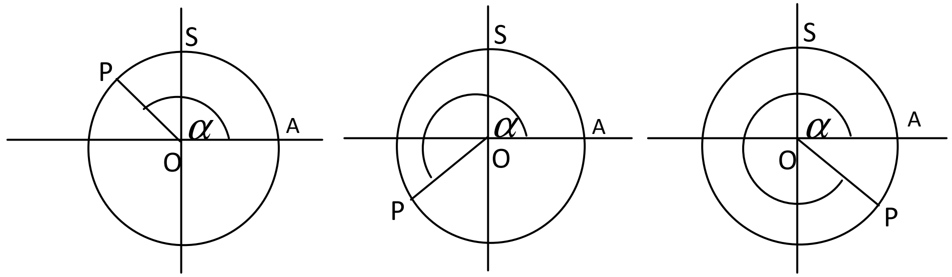
En el taller 4 se recurre nuevamente a la técnica del espiral, en relación a contenidos de años anteriores y del taller 1.
Se pretende que los estudiantes utilicen su intuición (destacada por Santaló) para dar respuesta a las cuestiones planteadas, así como también, se promueve el intercambio de opiniones entre compañeros, fomentando la socialización en el aula de matemática.

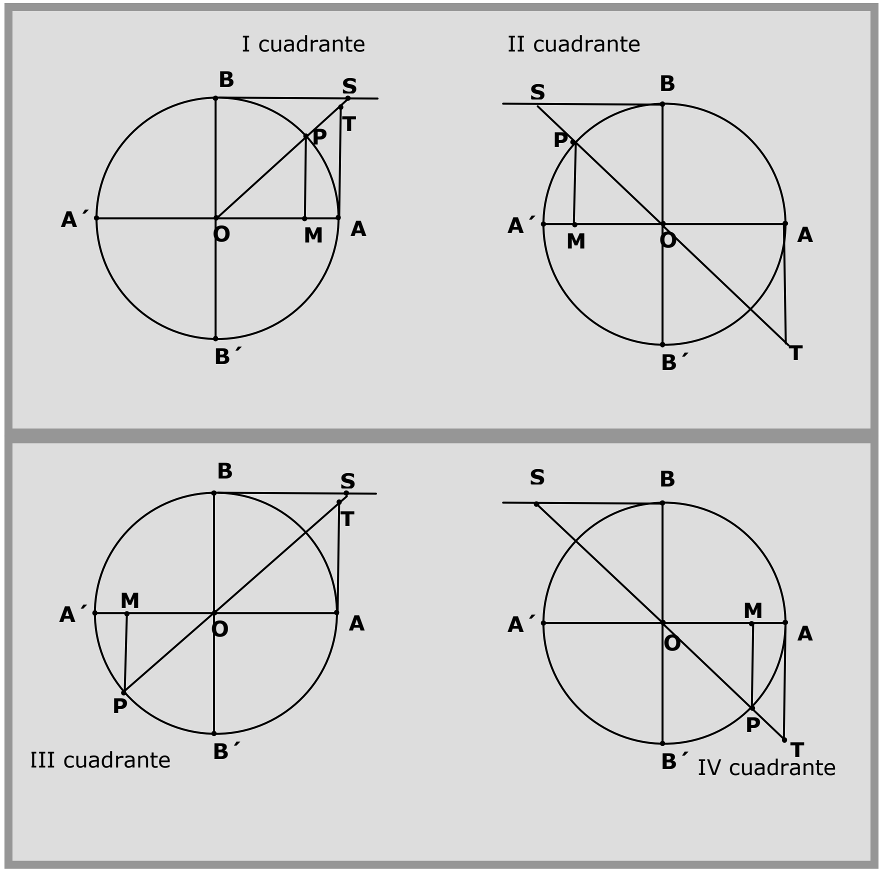
Recuerda que la longitud de cada cateto de un triángulo rectángulo es menor que la longitud de la hipotenusa del mismo.

1) En cada uno de los triángulos rectángulos que aparecen a continuación, calcula el valor de las seis funciones trigonométricas de los ángulos “x” e “y” y colócalas en los recuadros que aparecen más abajo.

Valores encontrados para el seno de x: de y:	Valores encontrados para el coseno de x: de y:
Valores encontrados para la tangente de x: de y:	Valores encontrados para la cotangente de x: de y:
Valores encontrados para la secante de x: de y:	Valores encontrados para la cosecante de x: de y:

El colegio Nuestro Punto de Encuentro





2) Observa que ha quedado formado un triángulo rectángulo semejante al triángulo OPM, ya que sus ángulos son congruentes por ser ángulos formados entre paralelas cortadas por una transversal.

3) Coloca en el triángulo OSR el ángulo α y define a partir del mismo las funciones cotangente, secante y cosecante.

a) ¿La longitud de cuál de los segmentos representa el valor de la cotangente de α?

b) ¿La longitud de cuál de los segmentos representa el valor de la cosecante de α?

Conclusión

Si α es un ángulo trazado en el primer cuadrante de la circunferencia trigonométrica como la de la figura de arriba, y como en todos los casos los denominadores fueron iguales a uno, entonces:

a) la longitud del segmento SR representa el valor de la cotangente de α.

PARTE D

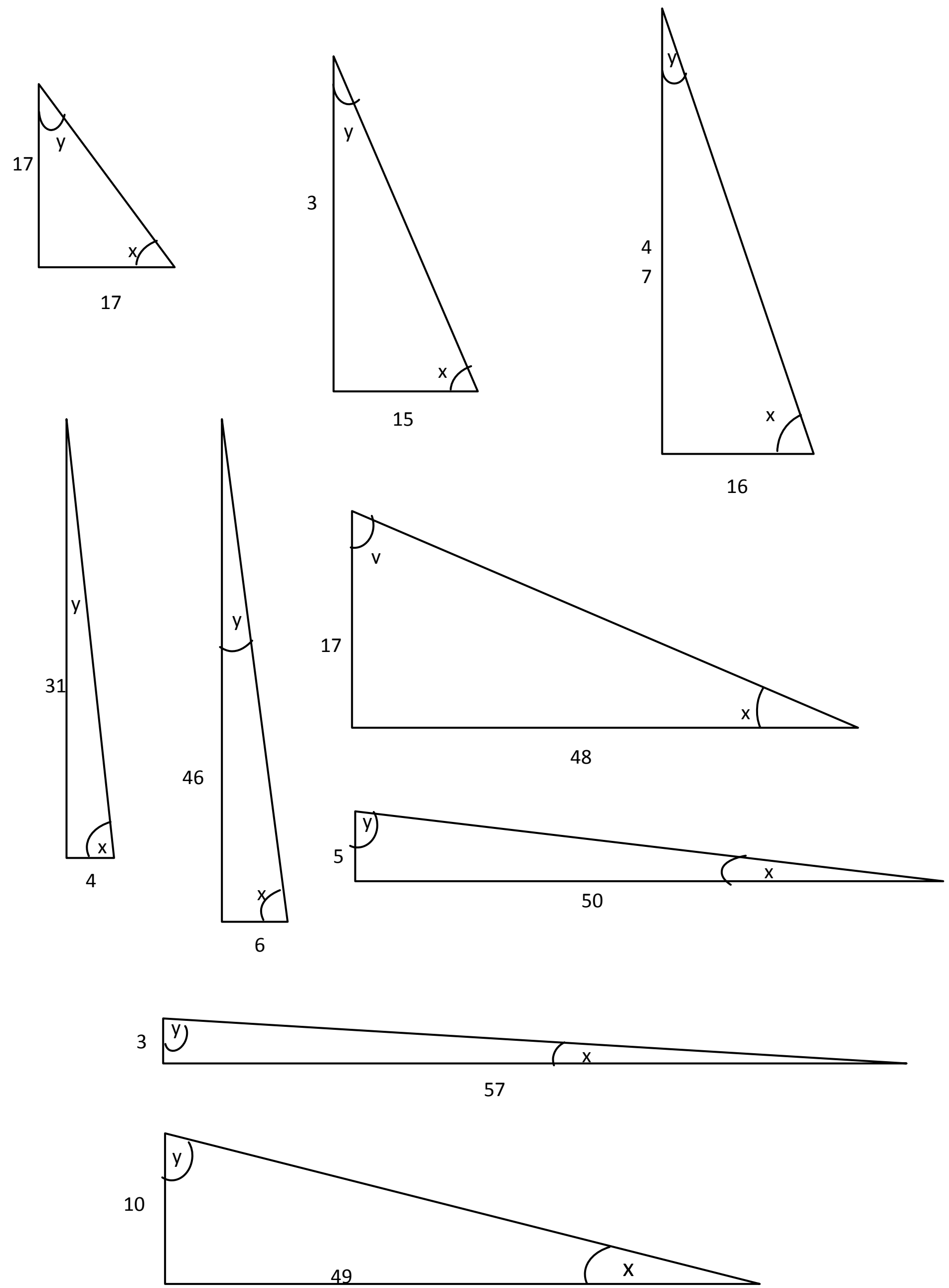
Ahora trabajaremos con ángulos mayores que 90º, esto es, ángulos en el II, III y IV cuadrante.

Debes tener en cuenta que:

a) el segmento que representa la tangente siempre se grafica hacia la derecha del eje de ordenadas (eje Y).

b) el segmento que representa la cotangente siempre se grafica hacia arriba del eje de abscisas (eje X).

Utilizando la conclusión obtenida en la **PARTE A**, determina en forma gráfica los segmentos cuyas longitudes representan los valores de las funciones trigonométricas en cada uno de los cuadrantes (si es necesario, prolonga en sentido contrario el radio del ángulo formado en cada uno de los cuadrantes).



2) Luego de haber completado los cuadros de arriba, ordena los resultados obtenidos para cada función de menor a mayor y saca una conclusión acerca de los posibles valores que pueden llegar a tomar las funciones trigonométricas en un triángulo rectángulo. Justifica tu razonamiento.
3) Compara con tu compañero de al lado las conclusiones obtenidas.
4) Retira de la mesa del (la) profesor (a) las conclusiones acerca del trabajo que haz realizado.

Conclusión
Como en todo triángulo rectángulo, la longitud de la hipotenusa es mayor que la longitud de cada uno de los catetos:

a) al dividir la longitud de los catetos entre la longitud de la hipotenusa el resultado obtenido siempre es menor a uno.

b) al dividir la longitud de la hipotenusa entre la longitud de cualquiera de los catetos el resultado obtenido siempre es mayor a uno.

c) ninguno de los catetos puede ser nulo, porque entonces no existiría triángulo, por lo tanto ningún cociente será nulo.

d) los catetos pueden ser de diferentes medidas (muy largos o muy cortos), entonces al dividir las medidas de los catetos entre sí el resultado puede ser un valor muy pequeño (pero nunca cero) o muy grande (tendiendo al infinito).

a) ¿La longitud de cuál de los segmentos representa el valor del seno de α?
b) ¿La longitud de cuál de los segmentos representa el valor del coseno de α?
3) Ahora define la tangente de α. ¿Puedes realizar una sustitución como en el ítem 2?
4) Si no puedes hacerlo, prolonga el radio OP hasta que se corte en el punto Q con la perpendicular al eje "X" trazada desde el punto A (donde la circunferencia corta al eje X).
5) El nuevo triángulo OQA es semejante al triángulo OPM, por lo que puedes definir la tangente de α utilizando los lados de triángulo OQA. Escribe la relación que representa la tangente de α y reemplaza por los valores conocidos.
6) ¿La longitud de cuál de los segmentos representa el valor de la tangente de α?
7) ¿La longitud de cuál de los segmentos representa el valor de la secante de α?

Conclusión
Si α es un ángulo trazado en el primer cuadrante de la circunferencia trigonométrica como la de la figura de arriba y como en todos los casos los denominadores fueron iguales a uno., entonces:

a) la longitud del segmento $\overline{PM}$ representa el valor del seno de α.
b) la longitud del segmento $\overline{OM}$ representa el valor del coseno de α.
c) la longitud del segmento $\overline{QA}$ representa el valor de la tangente de α.
d) La longitud del segmento $\overline{CQ}$ representa el valor de

PARTE C
1) Utilizando la misma figura que en la parte B, prolonga el radio OP hasta que se corte con la paralela al eje de abscisas que pasa por el punto S (intersección de la circunferencia con el eje Y) en el punto R.

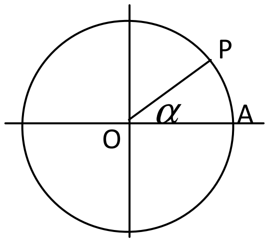
Instrucciones para el profesor

1) Dibujar en el suelo una circunferencia cuyo radio mida 1m. Marcar algunos ángulos en los cuatro cuadrantes, especialmente los ángulos de 0º, 30º, 45º, 60º, 90º, 120º, 135º, 150º, 180º, 210º, 225º, 240º,300º, 315º, 330º y 360º.
2) Trazar los triángulos rectángulos que se forman con los radios de los ángulos marcados y los segmentos perpendiculares al eje de abscisa en cada uno de los casos.
3) Los alumnos pasan por turno a medir las longitudes de los catetos perpendiculares al eje "x" y los que están sobre el eje "x".
4) Anotan los resultados de las mediciones.
5) Los estudiantes se reúnen en pequeños grupos para discutir acerca de los datos anotados y los comparan con los valores de las funciones trigonométricas de los arcos notables obtenidos en el **Taller 6.**

Conclusión
De las funciones trigonométricas (o circulares) podemos dar representaciones geométricas, es decir, dar segmentos cuyas longitudes sean los valores absolutos de las funciones trigonométricas.

PARTE B

La circunferencia de la figura de abajo tiene radio igual a 1 (conocida como circunferencia trigonométrica). En la misma se ha trazado un ángulo cuya abertura mide "α".



1) Traza un segmento perpendicular al eje de abscisas por el punto P de modo que quede formado un triángulo rectángulo y al pie de la perpendicular llámale M.

2) Define ahora en el triángulo OPM el seno y el coseno del ángulo "α" en función a los lados del triángulo y luego reemplaza por los valores que conozcas, teniendo en cuenta que la longitud del radio es 1.

De lo visto anteriormente se puede concluir entonces que:

a) los valores del seno y coseno de un ángulo agudo en cualquier **triángulo rectángulo** varían entre 0 y 1.
En símbolos: $0 < \text{sen } x < 1$; $0 < \cos x < 1$.

b) los valores de la tangente y la cotangente de un ángulo agudo en cualquier **triángulo rectángulo** son siempre mayores que 0.
En símbolos: $0 < \text{tg } x$; $0 < \text{cotg } x$.

c) los valores de la secante y la cosecante de un ángulo agudo en cualquier **triángulo rectángulo** son siempre mayores que 1.
En símbolos: $1 < \sec x$; $1 < \text{cosec } x$.

TALLER 5

Este taller es simplemente un modelo de forma de evaluación, que puede ser utilizada en cualquier momento del proceso enseñanza – aprendizaje.

Evaluación
TP: 5 **PC:**
Marca la respuesta correcta

1) Si m, n y p son dos números reales tales que $0 < m < n < p$, entonces puede ser cierto que:

I) sen x =m/n II) sec y = p/m III) cosec z = n/p

De las relaciones que aparecen arriba, es o son verdaderas:

a) sólo I
b) sólo II
c) sólo III
d) sólo I y II
e) sólo II y III

2) De las opciones siguientes la correcta es:

a) El mayor valor que puede tomar la suma del seno y el coseno de un mismo ángulo es uno.
b) El seno de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo puede ser igual a cero.
c) El coseno de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo puede ser igual a uno.
d) La tangente de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo puede ser igual a uno.
e) La cosecante de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo puede ser menor a uno.

3) En el triángulo rectángulo ABC, recto en $\hat{A}$, se sabe que el cateto $\overline{AB}$ es menor que el cateto $\overline{AC}$, entonces se puede asegurar que:

- tg B > tg C
- cotg C < cotg B
- sen B < sen C
- cos B < cos C

El colegio Nuestro Punto de Encuentro

5) ¿Cuántos puntos puedes encontrar en el plano, que se encuentren a una distancia igual a 5 del centro C de la circunferencia? Discute con tus compañeros.

Conclusión

La circunferencia es un conjunto de puntos del plano cuya distancia a un punto fijo, llamado centro es constante. Si (x, y) son las coordenadas de un punto cualquiera de la circunferencia y (h, k) son las coordenadas del centro de la misma, como todos los puntos de la misma están a la misma distancia del centro, tenemos que la ecuación que la representa está dada por: $\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=r$, que al elevar al cuadrado ambos miembros nos da $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$. Si el centro es el punto (0,0), la ecuación se reduce a $x^2+y^2=r^2$ y si consideramos $r = 1$, tenemos $x^2+y^2=1$.

TALLER 9

En el taller 9 se propone una actividad lúdica que favorece primero el descubrimiento y luego la comprensión de los elementos geométricos que sirven para representar los valores que toman las funciones

PARTE A

En cursos de geometría plana, hemos trabajado con ángulos entre 0º y 180º. Si se hace girar el radio de una circunferencia desde un punto cualquiera de la misma, hasta regresar al mismo, conseguimos ángulos que pueden medir hasta 360º (un giro completo sobre la circunferencia).

Conclusión

Si A (x_1, y_1) y B (x_2, y_2) son dos puntos en el plano cartesiano y

a) $\overline{AB}$ es paralelo al eje de abscisas, entonces

d(A, B) = $|x_2 - x_1|$.

b) $\overline{AB}$ es paralelo al eje de ordenadas, entonces

d(A, B) = $|y_2 - y_1|$.

PARTE B

1) Dibuja en el plano cartesiano los puntos A (2, 4) y B (6,7).
2) Traza a partir del punto A una recta paralela el eje de abscisas y a partir del punto B, una paralela al eje de ordenadas. Además, une los puntos A y B. Observa que queda formado un triángulo rectángulo.
3) Calcula utilizando lo aprendido en la **PARTE A**, la longitud de los dos catetos.
4) Aplicando la fórmula de Pitágoras, calcula la longitud de la hipotenusa.
5) En base al ítem 4 y a lo aprendido en la **PARTE A**, escribe una fórmula general para calcular la distancia entre dos puntos del plano.

Conclusión

Si A (x_1, y_1) y B (x_2, y_2) son dos puntos en el plano cartesiano, la fórmula para calcular la distancia entre dichos puntos está dada por d (A, B) = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

PARTE C

1) Marca el punto C (2,5) en el plano cartesiano.
2) Coloca el compás en dicho punto y ábrelo hasta hacer coincidir la punta del mismo con el eje x.
3) ¿Cuánto mide el radio de la circunferencia que has trazado?
4) ¿A qué distancia del punto C se encuentra el punto A (-3,5)? ¿y el punto B (7,5)? ¿Y el punto D (2,10)?

De las proposiciones anteriores es o son falsas:
a) todas
b) sólo tres
c) sólo dos
d) sólo una
e) ninguna

4) Dadas las proposiciones siguientes:
   I) La suma de las cosecantes de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo nunca puede ser igual a 2.
   II) La suma de las secantes de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo puede ser un número entre 1 y 2 inclusive.
   III) La suma de las tangentes de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo isósceles es siempre igual a 2.

   De las proposiciones anteriores es o son verdaderas:
   a) sólo I
   b) sólo II
   c) sólo III
   d) todas
   e) sólo I y II

5) En un triángulo rectángulo ABC cuyos lados miden a, b y c respectivamente, se sabe que a < b < c. Se puede afirmar que:
   - sen A < sen B < 1
   - 0 < cos A < cos B
   - 0 < sec A < 1
   - cosec B > 1

   De las proposiciones anteriores es o son verdaderas:
   a) Todas
   b) Sólo una
   c) Sólo dos
   d) Sólo tres
   e) Ninguna

Funciones Trigonométricas de arcos notables

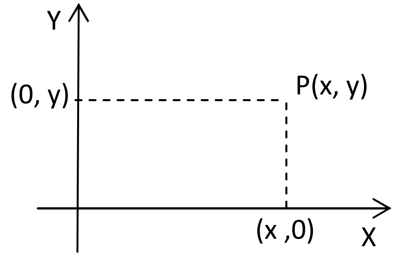
TALLER 6

En este taller están presentes nuevamente la técnica de las fichas y del espiral. Mediante las mismas, los estudiantes vuelven a utilizar sus conocimientos de trazado con regla y compás, del teorema de Pitágoras y de las definiciones recientemente aprendidas, de modo a descubrir los valores de las funciones trigonométricas de arcos notables y realizar la comparación entre las mismas. Con este trabajo, los estudiantes logran obtener conclusiones que utilizarán en talleres posteriores.

1) Grafica un triángulo equilátero utilizando regla y compás.
2) Traza una altura del triángulo.
3) Elige uno de los triángulos rectángulos que has obtenido al trazar la altura.
4) ¿Cuánto miden los ángulos agudos de los triángulos rectángulos obtenidos?
5) Considera en primer lugar el ángulo de 60º y define las seis funciones trigonométricas usando los nombres de los vértices del triángulo para indicar los lados del mismo.
6) Si consideras que todos los lados del triángulo miden "L", ya que se trata de un
triángulo equilátero,
   a) ¿cuánto mide la hipotenusa del triángulo rectángulo?
   b) ¿cuánto mide la base del triángulo rectángulo?
   c) ¿cuánto mide la altura del triángulo rectángulo? (Observación: utiliza la fórmula de Pitágoras).
7) Ahora reemplaza las expresiones obtenidas en el ítem 6) en las relaciones escritas en el ítem 5) y obtendrás los valores de las seis funciones trigonométricas para un ángulo de 60º.
8) Repite el mismo procedimiento de los ítems 5 al 7 para obtener los valores de las funciones trigonométricas del ángulo de 30º del triángulo rectángulo considerado.
9) Traza ahora un triángulo rectángulo isósceles (es decir, que las medidas de sus catetos son iguales).

Si P es un punto del plano, al punto P le hacemos corresponder el par ordenado (x, y), donde "x" es la coordenada de la proyección del punto P sobre el eje "X", e "y" es la coordenada de la proyección del punto P sobre el eje "Y".
Si (x, y) es el par ordenado asociado al punto P, "x" se llama la abscisa del punto P e "y" se llama la ordenada del punto P.
Los ejes coordenados dividen al plano en cuatro regiones llamadas cuadrantes.
Estas regiones se enumeran en sentido contrario al giro de las manecillas del reloj.
El primer cuadrante es el determinado por los semiejes positivos.
Los signos de las coordenadas de un punto P(x, y) se dan de la siguiente forma:

	I	II	III	IV
Abscisa	+	-	-	+
Ordenada	+	+	-	-



TALLER 8

El siguiente taller utiliza conocimientos previos que permiten desarrollar contenidos de Geometría Analítica que servirán de base para el taller 9.

PARTE A

1) Dibuja en el plano cartesiano los siguientes puntos: A (3, 4), B (7,4), C (3, 8), D (7, 2), E (-3,4) y F (7, -5).
2) Utilizando el método que prefieras, calcula distancia entre los puntos
   a) A y B b) B y E c) A y C d) B y D e) B y F f) A y E
3) Recuerda que las longitudes deben estar representadas siempre por números no negativos. A partir de ello y utilizando alguna operación aritmética intenta escribir una fórmula para calcular la distancia entre dos puntos, si el segmento que los une es paralelo a uno de los ejes coordenados.

Funciones Trigonométricas en la Circunferencia Trigonométrica.

EL PLANO CARTESIANO

La correspondencia biunívoca (uno a uno) que existe entre los puntos de una recta y el conjunto de los números reales permite establecer también una correspondencia biunívoca entre los puntos de un plano y el conjunto de pares ordenados de números reales. Al conjunto de todos los pares ordenados de números reales se lo simboliza por $\Re^2$.

Un par ordenado cuyo primer elemento es "x" y cuyo segundo elemento es "y" se simboliza por (x , y) y vale la pena destacar, que dos pares ordenados, (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son iguales si y solamente si $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.

La correspondencia entre los puntos de un plano dado, llamémoslo α, y el conjunto $\Re^2$ la establecemos de la siguiente forma: escogemos una recta del plano α, que por conveniencia la elegimos horizontal y en esta recta definimos un sistema de coordenadas, llamando eje de abscisas o eje X a la recta numérica así obtenida. Al punto de la recta, al cual le corresponde el número "x", lo simbolizamos por (x, 0) y ubicamos dicho punto sobre la recta, a la derecha del punto correspondiente al par (0,0) si "x" es positivo y a la izquierda del punto de coordenadas (0,0), si "x" es negativo.

En la perpendicular al eje X, por el punto de coordenadas (0,0) definimos un sistema de coordenadas y al punto que le corresponde el número "y", lo designamos por (0, y), ubicándolo por encima del punto de coordenadas (0,0), si "y" es positivo y por debajo, si "y" es negativo. A la recta numérica así definida la llamamos "eje de ordenadas" o "eje Y".

En general, la escala en ambos ejes coordenados suelen tomarse iguales, aunque en ocasiones, puede resultar conveniente tomarlos diferentes.

Con lo visto anteriormente, estamos ahora en condiciones de establecer una correspondencia entre cada punto del plano y un par ordenado de números reales. A dicho par ordenado le llamamos "coordenadas del punto".

10) ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos agudos del triángulo que trazaste?

11) Considera que la longitud de cada uno de los catetos es "L". Calcula el valor de la hipotenusa.

12) Escribe ahora las relaciones correspondientes a las seis funciones trigonométricas de cualquiera de los ángulos agudos del triángulo.

13) Completa la siguiente tabla.

	30º	**45º**	**60º**
Seno			
Coseno			
Tangente			
Cotangente			
Secante			
Cosecante			

14) Compara los resultados obtenidos y saca una conclusión al respecto.

Conclusión

sen 30º = cos 60º = $\frac{1}{2}$ cos 30º = sen 60º = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

tg 30º = cotg 60º= $\frac{\sqrt{3}}{3}$ cotg 30º = tg 60º= $\sqrt{3}$

sec 30º = cosec 60º= $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ cosec 30º = sec 60º= 2

sen 45º = cos 45º = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

tg 45º = cotg 45º = 1

sec 45º = cosec 45º= $\sqrt{2}$

Tal como era de esperar, según la parte B del Taller 1, el seno de un ángulo es igual al coseno de su complemento, la tangente de un ángulo es igual a la cotangente de su complemento y la secante de un ángulo es igual a la cotangente de su complemento.

Medida de ángulos. Conversión en los diferentes sistemas de medidas.

Para medir ángulos se emplean fundamentalmente dos **sistemas**: el que utiliza como unidad el grado sexagesimal y el que utiliza como unidad el radián.

Medir un ángulo es compararlo con otro que se toma por unidad de medida. Para medir los ángulos existen varios sistemas, siendo los más conocidos el **sistema sexagesimal y el circular.**

Sistema Sexagesimal

Se traza una circunferencia y se la divide en 360 partes iguales. Desde el centro de la misma se trazan dos radios a dos puntos consecutivos de la división realizada, de modo que queda determinado un ángulo central de la misma. La medida de dicho ángulo central recibe el nombre de grado sexagesimal. Un grado sexagesimal lo simbolizamos por 1º. Así una circunferencia tiene 360º y una semicircunferencia 180º.

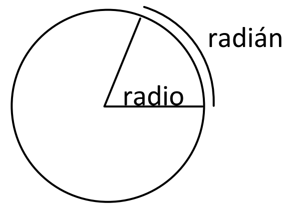
Si el arco subtendido por los radios que determinaron el ángulo cuya medida es 1º, se divide nuevamente en 60 partes iguales y se trazan los radios correspondientes a dos divisiones sucesivas, se obtiene un ángulo cuya medida recibe el nombre de 1 minuto sexagesimal y lo simbolizamos por 1'.

Si el arco subtendido por los radios que determinaron el ángulo cuya medida es 1', se divide nuevamente en 60 partes iguales y se trazan los radios correspondientes a dos divisiones sucesivas, se obtiene un ángulo cuya medida recibe el nombre de 1 segundo sexagesimal y lo simbolizamos por 1''.

1°=60'　　　　1'=60''　　　　1°=3600''

El colegio Nuestro Punto de Encuentro

Sistema circular.



En este sistema la unidad de media es el radián, que es la medida de un ángulo central que tiene como lados dos radios de una circunferencia y que subtiende un arco cuya longitud es igual al **radio** de la circunferencia a la cual pertenece.

Recordemos que en una circunferencia la longitud de su diámetro cabe 3,14159….veces sobre su contorno y a ese número, le llamamos π, es decir que el contorno de la circunferencia mide π D, donde D es el diámetro de la misma.

Según lo visto en el párrafo anterior, podemos notar que en una circunferencia cabe 2π veces el radio de la misma y por lo tanto, podemos relacionar con lo dicho en el primer párrafo y concluir que en una circunferencia caben 2π radianes.

Relación entre sistemas de medidas de ángulos

360º ------------ 2π radianes　　　　180º ------------- π radianes

TALLER 7
Ejercicios de conversión de un sistema a otro mediante fichas de trabajo.

La técnica propuesta a continuación puede ser utilizada como medio de evaluación de los aprendizajes.

El docente prepara cédulas con dos ejercicios en cada una de ellas y las coloca en un recipiente del cual cada estudiante extraerá al azar una.

El estudiante resuelve los ejercicios en la pizarra y el profesor evalúa. Esta técnica puede ser utilizada en simultáneo con otra técnica, puesto que mientras un alumno está siendo evaluado los demás pueden estar realizando otra actividad.