BICENTENARIO
EDUCATIVO

PARAGUAY TODOS Y TODAS

"Bicentenario de la Independencia Nacional: 1811 - 2011"

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CULTURA
Presidencia de la República del Paraguay

El Colegio, nuestro punto de encuentro

Material de distribución gratuita. Prohibida su venta

MÓDULO 5

Matemática

MÓDULO 5: Derivada y sus aplicaciones
Campaña de Apoyo a la Gestión Pedagógica a
Docentes en Servicio - 2011

PARAGUAY TODOS Y TODAS
PARAGUAY BICENTENARIO

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CULTURA
Presidencia de la República del Paraguay

omapa
ORGANIZACIÓN MULTIDISCIPLINARIA DE APOYO A PROFESORES Y ALUMNOS

El Colegio, nuestro punto de encuentro

FICHA TECNICA

Presidente de la República
Fernando Lugo Méndez
Ministro de Educación y Cultura
Luis Alberto Riart Montaner
Viceministro de Educación para el Desarrollo Educativo
Héctor Salvador Valdez Alé
Viceministra de Educación para la Gestión Educativa
Diana Carolina Serafini Fernández
Directora General de Educación Media
Alcira Concepción Sosa Penayo
Directora de Bachillerato Científico
Ana Claudia Meza
Director de Bachillerato Técnico
Ramón Iriarte
Director Administrativo
Marcelo Esquivel
Coordinadora Unidad de Resignificación de la Educación Media:
Sara Raquel López Cristaldo
Elaboradoras:
Diana Giménez de von Lücken
Ingrid Wagener de Gauto

Bibliografía

1) **Sadosky, Manuel; de Guber, Rebeca.** Elementos de Cálculo Diferencial e Integral. Librería y Editorial Alsina. Buenos Aires.
2) **Spivak, Michael.** CALCULUS. Cálculo infinitesimal. Editorial Reverté S.A.España
3) **Guzmán, Miguel de; Colera, José.** Matemáticas I y II COU. Editorial Anaya.España.
4) **Purcell, Edwin; Varberg, Dale.** Cálculo con Geometría Analítica. Prentice Hall. México
5) **Larson, Ron; Hostetler, Robert.** Cálculo I. Ediciones Pirámide. Madrid.
6) **Apuntes de clases de las autoras.** La mayoría de los ejercicios y problemas propuestos en este cuadernillo son de elaboración propia. Los mismos fueron creados por las autoras para el desarrollo de sus propias cátedras y han sido aplicados y validados durante sus prácticas de aula.

Índice

Reflexión final

1) Formar grupos de 5 integrantes.
2) Leer el texto que aparece a continuación.

Es importante dejar en claro que en esta jornada se ha estudiado el concepto de derivada de una función y se han realizado algunas prácticas al respecto de ello, pero que el concepto que hemos desarrollado tiene variadas aplicaciones.

La derivada es un concepto que se aplica en aquellos casos en los que se desea medir la rapidez con que se produce el cambio de una magnitud o situación y por ello resulta una herramienta de gran utilidad.

A nivel de estudios universitarios, esta herramienta adquirida en la educación media se podrá utilizar en Física, en Química, en Biología, en Ciencias Sociales, en Economía, en Psicología, etc. una vez que se manejen los conceptos teóricos de cada disciplina en particular.

3) Comentar acerca de la lectura.
4) Buscar ejemplos prácticos de otras ramas (distintas de las matemáticas) en las que se aplica el concepto de derivada de funciones. Se sugiere que sean ejemplos reales.
5) Anotar las conclusiones del grupo.
6) En plenaria un representante de cada grupo lee las conclusiones.

6) Un cartel rectangular para la presentación del proyecto de fin de curso debe contener 7.200 cm^2 de texto o imágenes y sus márgenes deben ser de 4 cm. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de tu cartel para utilizar la menor cantidad de cartulina?

7) Una ventana llamada de "Norman" o "normanda" está formada por un semicírculo unido a una ventana rectangular ordinaria. Construye una ventana normanda de marcos metálicos, cuya área sea máxima sabiendo que dispones para su fabricación de 16 metros de varilla.

8) Los alumnos del tercer año de la media quieren construir pandorgas para jugar con los niños de la primaria en el día del niño. Se han cortado dos varillas de 30 cm y dos de 50 cm para la parte exterior. ¿Cuál debe ser la longitud de las varillas diagonales para que el área de la pandorga sea máxima?

Introducción

Este cuadernillo ha sido elaborado para ser utilizado en las jornadas de la Campaña de Apoyo a la Gestión Pedagógica a Docentes en Servicio – 2011, en el Área Matemática, con los y las docentes participantes.

En cada uno de los talleres, se desarrollan actividades a ser propuestas por los y las docentes a sus estudiantes, a fin de lograr la apropiación de los conceptos de Derivada y sus aplicaciones por parte de los mismos.

Reflexión

1) Lee el comentario que aparece a continuación

"En 1604, en la cumbre de su carrera científica, Galileo llegó a la conclusión de que para un movimiento rectilíneo en el que la velocidad aumenta proporcionalmente a la distancia recorrida, la ley del movimiento no debía ser precisamente aquella ($x= c\ t^2$) que él había descubierto en la investigación de la caída de los cuerpos.
Entre 1695 y 1700 ninguno de los números mensuales de la Acta Eruditorum de Leipzig se publicó sin artículos de Leibniz, de los hermanos Bernoulli o del marqués de L´Hopital que trataban, con notación ligeramente distinta de la de hoy día, los problemas más variados de cálculo diferencial, cálculo integral y cálculo de variaciones.
Así, en el espacio de casi precisamente un siglo, el cálculo infinitesimal o como se suele llamar ahora en inglés, el "Calculus", el instrumento de calcular por excelencia, fue forjado; y casi tres siglos de uso constante no han agotado este instrumento incomparable."

Nicholas Bourbaki

2) Luego de la lectura se forman grupos de trabajo y los o las facilitadores/ras entregan unas hojas con la biografía de algunos matemáticos que tuvieron mucha influencia en el avance del cálculo.
3) Los o las facilitadores/ras colocarán en una pared un papel con una línea del tiempo en la que aparecerán solamente algunos años como puntos de referencia.
4) Los integrantes de los grupos pasarán a completar la línea del tiempo con la información disponible.
5) Luego de que cada grupo haya completado parte de la línea del tiempo, se hace una plenaria para compartir las informaciones de cada grupo.

El colegio Nuestro Punto de Encuentro

TALLER 12

El objetivo del Taller 12 es que los y las estudiantes apliquen el criterio de la segunda derivada en la resolución de problemas de optimización.

Para la realización de este taller, el o la docente debe pedir a sus estudiantes con anticipación los materiales que deberán ser utilizados en clase, de manera a resolver los problemas y posteriormente reproducir de manera tangible los resultados obtenidos.

1) Te han encomendado diseñar un afiche de propaganda que debe contener 50 cm^2 de material impreso con 4 cm de margen arriba y abajo y 2 cm de margen a los lados. ¿Qué dimensiones debe tener el afiche para que gaste la menor cantidad de papel?

2) Construye una caja sin tapa de 36.000 cm^3 de modo que el largo de la misma mida el doble que su ancho. Si la condición es que debes usar la menor cantidad de cartón, ¿cuáles deben ser las dimensiones de la caja?

3) Dispones de un alambre maleable de 100 cm de longitud. Debes cortar el alambre de modo a construir con una de las partes un cuadrado y con la otra un triángulo equilátero. ¿Cuánto debe medir cada pedazo de alambre para que la suma de las áreas de las figuras formadas sea mínima?

4) Dispones de 200 metros de alambre tejido para cercar dos corrales rectangulares adyacentes. Determina las dimensiones de cada corral de modo que el área total encerrada sea máxima.

5) Para la fiesta de curso quieren armar una pista de baile formada por un rectángulo y un semicírculo adosado en cada extremo. Para bordear la pista disponen de 200 metros de una cinta que brilla en la oscuridad. Determina las dimensiones de la pista si se desea conseguir el área máxima.

3) Determina los extremos locales de $f(x) = x^2 - 6x + 5$ en su dominio de definición.

4) Dada la función $f(x)= x^3 + 5$, determina si tiene o no máximo o mínimo local. Justifica tu respuesta.

Siendo $f'(c) = 0$, entonces:

Si $f'(x) > 0$ para toda x de (a, c) y $f'(x) < 0$ para toda x de (c, b), entonces f(c) es un **máximo** local de f.

Si $f'(x) < 0$ para toda x de (a, c) y $f'(x) > 0$ para toda x de (c, b), entonces f(c) es un **mínimo** local de f.

Si $f'(x)$ tiene el mismo signo a ambos lados de c, entonces f (c) no es ni máximo ni mínimo local.

TALLER 11

El objetivo del Taller 11 es que los y las estudiantes apliquen la segunda derivada para determinar extremos locales.

Prueba de la segunda derivada para la determinación extremos locales.

Sean f' y f'' dos funciones que existen para cada punto, en un intervalo abierto (a, b) que contiene al punto "c". Supongamos que $f'(c) = 0$.

a) Si $f''(c) < 0$, f(c) es un máximo local de f.

b) Si $f''(c) > 0$, f(c) es un mínimo local de f.

1) Utiliza la prueba de la segunda derivada para identificar los extremos locales de $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

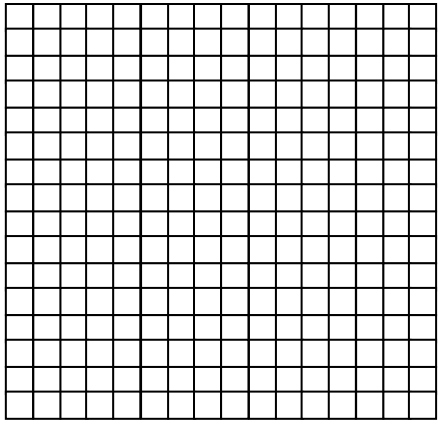
2) Para $f(x)= 1/3\, x^3 - x^2 - 3x + 4$, aplica el criterio de la segunda derivada para identificar extremos locales.

INCREMENTOS

TALLER 1

El objetivo del Taller 1 es que los y las estudiantes comprendan la idea de variación de las funciones.

1) En el plano cartesiano que aparece a continuación, representa la gráfica de la función $f(x) = x$.



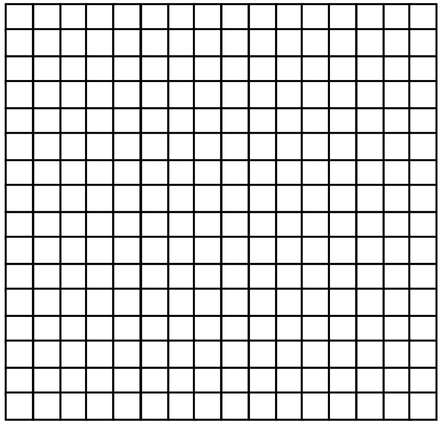
2) Completa la siguiente tabla y marca los puntos $P_i(x_i, y_i)$ en la gráfica del ítem 1.

X_i	$f(x_i)$	$x_i - x_0$	$f(x_i) - f(x_0)$	$\frac{f(x_i)-f(x_0)}{x_i - x_0}$
$x_0 = 2$	$f(x_0) =$			
$x_1 = 7$	$f(x_1) =$			
$x_2 = 6$	$f(x_2) =$			
$x_3 = 5$	$f(x_3) =$			
$x_4 = 4$	$f(x_4) =$			
$x_5 = 3$	$f(x_5) =$			
$x_6 = 2.5$	$f(x_6) =$			
$x_7 = 2.2$	$f(x_7) =$			
$x_8 = 2.1$	$f(x_8)=$			
$x_9 = 2.01$	$f(x_9)=$			

Tabla 1

3) ¿Qué conclusión puedes sacar de los resultados obtenidos en la columna $\dfrac{f(x_i)-f(x_0)}{x_i - x_0}$ del ítem 2?

4) En el plano cartesiano que aparece a continuación, representa la gráfica de la función $f(x) = x^2$.



5) Completa la siguiente tabla y marca los puntos $P_i(x_i,\ y_i)$ (siempre que sea posible) en la gráfica del ítem 4.

$\mathbf{X_i}$	$\mathbf{f(x_i)}$	$\mathbf{X_i - x_0}$	$\mathbf{f(x_i) - f(x_0)}$	$\dfrac{f(x_i)-f(x_0)}{x_i - x_0}$
$x_0 = 2$	$f(x_0) =$			
$x_1 = 7$	$f(x_1) =$			
$x_2 = 6$	$f(x_2) =$			
$x_3 = 5$	$f(x_3) =$			
$x_4 = 4$	$f(x_4) =$			
$x_5 = 3$	$f(x_5) =$			
$x_6 = 2.5$	$f(x_6) =$			
$x_7 = 2.2$	$f(x_7) =$			
$x_8 = 2.1$	$f(x_8)=$			
$x_9 = 2.01$	$f(x_9)=$			

Tabla 2

4) ¿En qué intervalo es decreciente la función $f(x)= x^2 - 2$?

5) Dada la función $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$, determina los intervalos en que f(x) es creciente o decreciente.

Dada una función continua f(x) definida en un intervalo I y derivable en todo punto interior de I.
a) Si $f'(x) > 0$ para toda x de I, entonces f es creciente en I.
b) Si $f'(x) < 0$ para toda x de I, entonces f es decreciente en I.

TALLER 10

El objetivo del Taller 10 es que los y las estudiantes apliquen lo aprendido en el taller 9 para encontrar una forma de determinar máximos y mínimos de funciones.

a) Decimos que una función tiene un máximo local en un punto "a" de un intervalo I del dominio de f si para todo x de I (distinto de a) se tiene que $f(x) < f(a)$.

b) Decimos que una función tiene un mínimo local en un punto "b" de un intervalo I del dominio de f, si para todo x de I (distinto de a) se tiene que $f(x) > f(b)$.

1) Dadas las siguientes proposiciones, <u>subraya</u> la palabra en negrita que corresponda en cada caso.

1.a) Si $f'(x) > 0$ para toda x de (a, c) y $f'(x) < 0$ para toda x de (c, b), entonces f(c) es un **máximo** **mínimo** local de f.

1.b) Si $f'(x) < 0$ para toda x de (a, c) y $f'(x) > 0$ para toda x de (c, b), entonces f(c) es un **máximo** **mínimo** local de f.

2) ¿Puedes asegurar que f tiene un máximo o mínimo local en f(c) si la derivada a ambos lados de c tiene el mismo signo? Justifica tu respuesta.

3) Aplicando lo demostrado en los ítems 1 y 2 de este taller y el ítem 4d del taller anterior, demuestra que si f(x) = tg x, entonces f´(x) = $\sec^2$ x.

4) Siguiendo las mismas instrucciones que en el ítem 3, demuestra que si f(x) = cotg x , entonces f´(x) = - cosec^2 x.

5) Siguiendo las mismas instrucciones que en el ítem 3, demuestra que si f(x) = sec x , entonces f´(x) = sec x . tg x.

6) Siguiendo las mismas instrucciones que en el ítem 3, demuestra que si f(x) =cosec x, entonces f´(x)= -cosec x.cotg x.

TALLER 9

El objetivo del Taller 9 es que los y las estudiantes comprendan el concepto de funciones crecientes y decrecientes y apliquen la derivación para realizar el análisis

Dada una función f(x) en un intervalo I, decimos que:

a) f es **creciente en I**, si para cada par de números x_1 y x_2 de I, se tiene que si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$.
b) f es **decreciente en I**, si para cada par de números x_1 y x_2 de I, se tiene que si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) > f(x_2)$.
c) f es **estrictamente monótona en I** si es creciente o decreciente en I.
Recuerda que la primera derivada $f´(x_0)$ da la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto x_0, entonces:

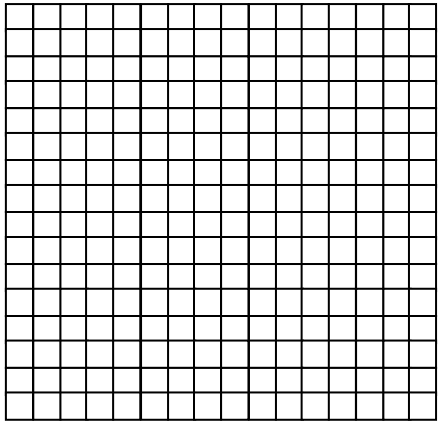
1) si f´(x) > 0, ¿la función es creciente o decreciente?. Justifica tu respuesta.

2) si f´(x) < 0, ¿la función es creciente o decreciente?. Justifica tu respuesta.

3) Según tus conclusiones, ¿cómo es la función f(x) = x^3 en todo su dominio?

6) ¿Qué conclusión puedes sacar de los resultados obtenidos en la columna $\dfrac{f(x_i)-f(x_0)}{x_i-x_0}$ del ítem 5?

7) En el plano cartesiano que aparece a continuación, representa la gráfica de la función f(x) = $\frac{1}{2}x^3$.



8) Completa la siguiente tabla y marca los puntos $P_i(x_i, y_i)$ (siempre que sea posible) en la gráfica del ítem 7.

X_i	$f(x_i)$	$X_i - X_0$	$f(x_i) - f(x_0)$	$\dfrac{f(x_i)-f(x_0)}{x_i-x_0}$
$x_0 = 2$	$f(x_0)$ =			
$x_1 = 7$	$f(x_1)$ =			
$x_2 = 6$	$f(x_2)$ =			
$x_3 = 5$	$f(x_3)$ =			
$x_4 = 4$	$f(x_4)$ =			
$x_5 = 3$	$f(x_5)$ =			
$x_6 = 2.5$	$f(x_6)$ =			
$x_7 = 2.2$	$f(x_7)$ =			
$x_8 = 2.1$	$f(x_8)$=			
$x_9 = 2.01$	$f(x_9)$=			

Tabla 3

9) ¿Qué conclusión puedes sacar de los resultados obtenidos en la columna $\frac{f(x_i) - f(x_0)}{x_i - x_0}$ del ítem 8?

10) Analiza cuidadosamente los resultados obtenidos en los ítems 2, 5 y 8 y escribe tu conclusión.

11) Compara tu respuesta con la de tu compañero o compañera de al lado.

12) Forma grupos de 4 estudiantes para compartir tus respuestas durante 5 minutos.

13) Un integrante de cada grupo pasa al frente para explicar sus conclusiones y el o la docente aclara, si es necesario, las conclusiones obtenidas por los distintos grupos.

Conclusión

Cuando la función es lineal, el cociente entre la variación de las ordenadas y la variación de las abscisas es constante, mientras que para otras funciones, cambia según el comportamiento de la función.

TALLER 2

El objetivo del taller 2 es generalizar el concepto estudiado en el Taller 1.

Un poco de teoría…

1) Considera una función **y = f(x)** y dos puntos próximos sobre el eje de abscisas **"x_0"** y **"x_0+h"**, siendo **"h"** un número real que corresponde al incremento de x **(Δx)**. Observa la gráfica que te presenta el/la docente, cópiala en tu hoja y luego trabaja a partir de la misma.

4) Luego de haber comprendido y practicado las operaciones con funciones demuestra, aplicando la definición de derivadas, que:

a) La derivada de una suma de funciones es igual a la suma de las derivadas de las funciones.
En símbolos: $((u+v)(x))' = u'(x) + v'(x)$

b) La derivada de la diferencia de dos funciones es igual a la diferencia de las derivadas de las funciones.
En símbolos: $((u-v)(x))' = u'(x) - v'(x)$

c) La derivada del producto de dos funciones es igual al producto de la derivada de la primera función por la segunda función más el producto de la primera función sin derivar por la derivada de la segunda función.
En símbolos: $((u.\ v)(x))' = u'(x)\ .\ v(x) + u(x)\ .\ v'(x)$

d) La derivada de un cociente de dos funciones es igual a la derivada del numerador por el denominador sin derivar menos el numerador sin derivar por la derivada del denominador, dividida esta diferencia por el cuadrado del denominador.

En símbolos: $\left(\left(\frac{u}{v}\right)(x)\right)' = \frac{u'(x).v(x) - u(x).v'(x)}{v^2(x)}$

TALLER 8

El objetivo del Taller 8 es que los y las estudiantes descubran las fórmulas de la derivada de las funciones trigonométricas.

1) Demuestra, aplicando la definición de derivadas y la transformación en producto de la diferencia de senos que, si f(x) = sen x, entonces f´(x) = cos x.

2) Demuestra, aplicando la definición de derivadas y la transformación en producto de la diferencia de senos que si f(x) = cos x, entonces f´(x) = - sen x.

TALLER 7

El objetivo del Taller 7 es que los y las estudiantes descubran las fórmulas de la derivada de una suma, diferencia, producto y cociente de funciones.

Dadas dos funciones f(x) y g(x), recordemos que se definen las operaciones de adición, diferencia, producto y cociente entre las funciones de la siguiente forma:

a) Adición: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ con $D(f + g) = D(f) \cap D(g)$.

b) Diferencia: $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ con $D(f - g) = D(f) \cap D(g)$.

c) Producto: $(f.g)(x) = f(x).g(x)$ con $D(f.g) = D(f) \cap D(g)$.

d) Cociente: $(f/g)(x)=f(x)/g(x)$ con $D(f/g)=D(f)\cap D(g)-\{x/g(x)=0\}$

1) Dadas las funciones $f(x) = 2x^3$ y $g(x) = 3x + 1$, determina

a) (f +g)(x) b)(f-g)(x) c) (f.g)(x) d)(f/g)(x)

e) D(f+g) f) D(f-g) g) D(f.g) h) D(f/g)

2) Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = x^2 - 1$, determina

a) (f +g)(x) b)(f-g)(x) c) (f.g)(x) d)(f/g)(x)

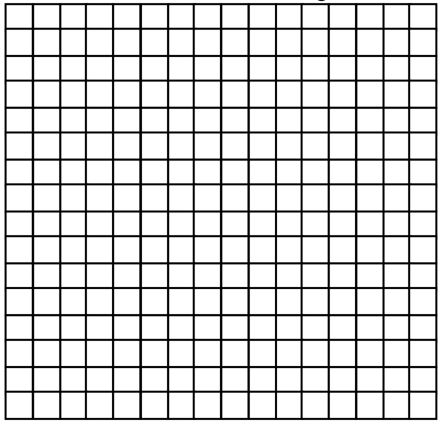
e) D(f+g) f) D(f-g) g) D(f.g) h) D(f/g)

3) Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x-1}$ y $g(x) = x + 2$, determina

a) (f + g)(x) b)(f-g)(x) c) (f.g)(x) d)(f/g)(x)

e) D(f+g) f) D(f-g) g) D(f.g) h) D(f/g)

4) Aplicando las fórmulas obtenidas anteriormente, calcula la derivada de las operaciones realizadas en el ítem 1. Si quieres ejercitarte más, haz lo mismo con las operaciones realizadas en los ítems 2 y 3.



2) A la diferencia entre las ordenadas correspondientes a los puntos de abscisas x_0 y $x_0 + h$, se le llama **tasa de variación de la función en el intervalo $[x_0, x_0+h]$** (la nombraremos por comodidad con T.V.) y se representa mediante la expresión $\Delta y = [f(x_0+h) - f(x_0)]$.

3) Al cociente entre la tasa de variación (T.V.) y la amplitud del intervalo considerado sobre el eje de abscisas, h ó Δx, se le llama **tasa de variación media** (la nombraremos por comodidad con T.V.M.) y se representa por $\frac{\Delta y}{h}$ o $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

En símbolos: $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

4) Observando la gráfica citada en el ítem 1 y recordando lo estudiando en el curso de Geometría Analítica, escribe lo que representan a tu criterio, lo que se pide a continuación:

a) la recta en relación a la curva: ___________________________

b) $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ en relación a la recta: ___________________

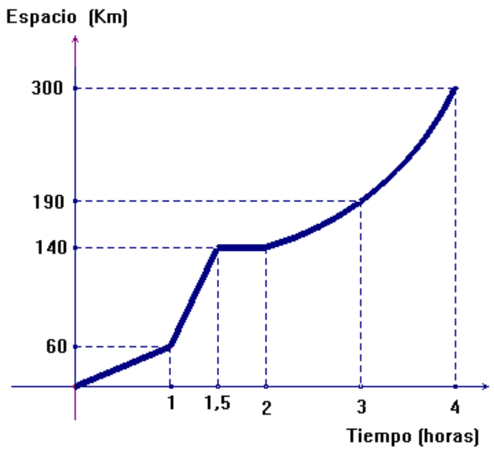
TALLER 3

El Taller 3 permite al/a la docente evaluar la comprensión de los y las estudiantes acerca del concepto de tasa de variación media.

1) Calcula la tasa de variación media de la función $f(x) = x^2 - x$ en el intervalo [1,4].

2) Calcula la T.V.M (Tasa de Variación Media) de la función $f(x) = 2x + 5$ en los intervalos [0,2],[-1,3] y [2,4].

3) La gráfica de abajo representa el movimiento de un automóvil que recorre 300 km en 4 horas.



Determina:

a) La velocidad media (tasa media) del automóvil desde su punto de partida (t= 0) hasta su punto de llegada (t=4).
b) ¿Crees que la velocidad media del automóvil ha sido la misma en todos los intervalos de tiempo indicados en la gráfica?

3) En relación al ítem 2) ¿qué puedes concluir acerca de la derivada de $f(x) = x$ en cualquier punto del eje x?
4) Demuestra que la derivada de la función $f(x) = k$, donde k es una constante es siempre igual a cero (esto es, no importa cuál sea el punto x_0).
5) Demuestra que la derivada de $f(x)= a x+ b$ en el punto de abscisa x_0 es igual a $f'(x_0) = a$.
6) Demuestra que la derivada de $f(x) = x^3$ en el punto de abscisa x_0 es igual a $f'(x_0) = 3 x_0^2$.
7) Demuestra que la derivada de $f(x) = \frac{1}{x}$ en el punto de abscisa x_0 es igual a $f'(x_0) = -\frac{1}{(x_0)^2}$.
8) Demuestra que la derivada de $f(x) = ax^2 + bx + c$ en el punto de abscisa x_0 es igual a $f'(x_0) = 2 ax_0 + b$.
9) Demuestra que la derivada de $f(x) = x^4$ en el punto de abscisa x_0 es igual a $f'(x_0) = 4 x_0^3$.
10) Demuestra que la derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ en el punto de abscisa x_0 es igual a $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$.
11) A partir de los ejercicios anteriores completa los siguientes cuadros que podrás utilizar como formulario a partir de ahora.

$f(x) = k$	→	$f'(x) =$
$f(x) = x$	→	$f'(x) =$
$f(x) = x^n$; n entero positivo	→	$f'(x) =$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$; n entero positivo	→	$f'(x) =$
$f(x) = x^{n/m}$; n, m enteros	→	$f'(x) =$

NOTACIÓN

Denotamos la derivada de una función en punto "x" mediante:

$$f'(x);\ y';\ D_y;\ [f(x)]';\ Df(x);\ D_x f(x); \frac{dy}{dx}$$

TÉCNICA PARA CALCULAR LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO x_0

1) Dar a la variable x un incremento positivo o negativo Δx, a partir de x_0, de modo a obtener $x_1 = x_0 + \Delta x$.

2) Calcular el valor y_1 a partir de x_1.

3) Calcular el incremento Δy.

4) Escribir el cociente incremental e intentar eliminar todos los factores que hacen que el límite sea indeterminado de la forma $\frac{0}{0}$.

5) Calcular el límite del cociente incremental: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

TALLER 6

El objetivo del Taller 6 es que los y las estudiantes apliquen el concepto de derivada de una función en un punto x_0 para encontrar fórmulas y para encontrar las derivadas de funciones particulares.

1) Siguiendo los pasos descriptos al final del taller 5, demuestra que la derivada de la función $f(x) = a\,x^2$ en el punto de abscisa x_0 es $f'(x_0) = 2\,a\,x_0$.

2) Demuestra que la derivada de la función $f(x)= x$ en el punto de abscisa x_0 es 1.

c) ¿Cuál es la velocidad media (tasa media) durante su primer tramo?

d) ¿Cuál es la velocidad media (tasa media) durante su segundo tramo?

e) ¿Cuál es la velocidad media (tasa media) en el tercer tramo (entre t=1,5 y t = 2)? ¿Cómo está el automóvil en ese tiempo?

f) ¿Cuál es la velocidad media (tasa media) entre t=2 y t=4?

g) ¿Cuál es la velocidad media (tasa media) entre t=2 y t=3?

h) ¿Cuál es la velocidad media (tasa media) entre t=3 y t=4?

i) Analiza tus resultados de los ítems f, g y h y contesta.
i.1) ¿Es la velocidad media (tasa media) del automóvil la misma en los intervalos de tiempo indicados entre t=2 y t=4?
i.2) ¿En qué intervalo es mayor la velocidad media? Justifica tu respuesta.

TALLER 4

El objetivo del taller 4 es que los y las estudiantes comprendan el concepto de límite del cociente incremental.

1) Considera la función estudiada en el ítem 4 del taller 1 y escríbela en el siguiente recuadro.

f(x) =

2) Contesta las siguientes preguntas en relación a la función del ítem 1.

a) ¿Es continua la función? ____________________.
Justifica tu respuesta: ______________________________
____
____

b) ¿Qué sucede con los valores de Δy a medida que los valores de Δx se hacen cada vez más pequeños?________

____

c) En base a tu respuesta anterior, completa lo que le falta al siguiente cuadro.

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \qquad}$$

d) Revisa los resultados que obtuviste en la tabla del ítem 5 del taller 1 y compara con tu respuesta del ítem c del taller 4. ¿Qué puedes decir al respecto? ¿Se puede encontrar un número real para el límite $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$?

e) Considera ahora que $y_1 = (x_1)^2$......1 y que $y_0 = (x_0)^2$......2 y encuentra el valor de la expresión Δy restando (2) de (1).___________________

f) Factoriza el resultado del ítem e) ___________________

g) Sustituye por Δx lo que corresponda en el ítem anterior ___________________

h) Escribe el cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ según lo obtenido en el ítem g)

____

i) ¿Es constante la relación que has obtenido? ¿Por qué?

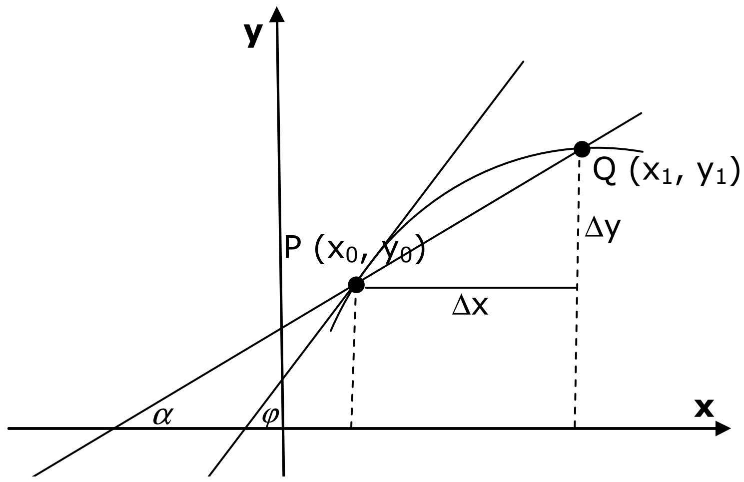
____

j) Prosiguiendo con el estudio de la función $f(x) = x^2$ y considerando en particular el punto de abscisa $x_0 = 1$, observa y analiza los resultados de la tabla 4.

Δx	1	0,5	0,1	0,05	0,01	0,001
$x_1 = 1 + \Delta x$	2	1,5	1,1	1,05	1,01	1,001
Δy	3	1,25	0,21	0,1025	0,0201	0,002001
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	3	2,50	2,1	2,05	2,01	2,001 $\to 2$

Tabla 4

Cuando $\Delta x \to 0$ el punto Q tiende al punto P y la posición límite de la recta secante PQ es la recta tangente PT, que forma con el eje de las abscisas un ángulo φ.



DEFINICION

Llamamos derivada de una función y = f(x) en un punto P(x_0, y_0) al límite del cociente incremental $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ cuando $\Delta x \to 0$, que en símbolos escribimos $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Interpretemos geométricamente la derivada de una función y =f(x) en el punto P (x_0, y_0), como la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto (es importante dejar en claro que esta es una aplicación de la derivada de una función en un punto, pero que la definición es la que dimos en el párrafo anterior).

El ángulo φ constituye el límite de los ángulos α que las diversas rectas secantes PQ forman con el eje "x" cuando $\Delta x \to 0$. Dicho ángulo es la inclinación de la curva en el punto P y la tangente del ángulo φ es la pendiente de la curva en el punto P.

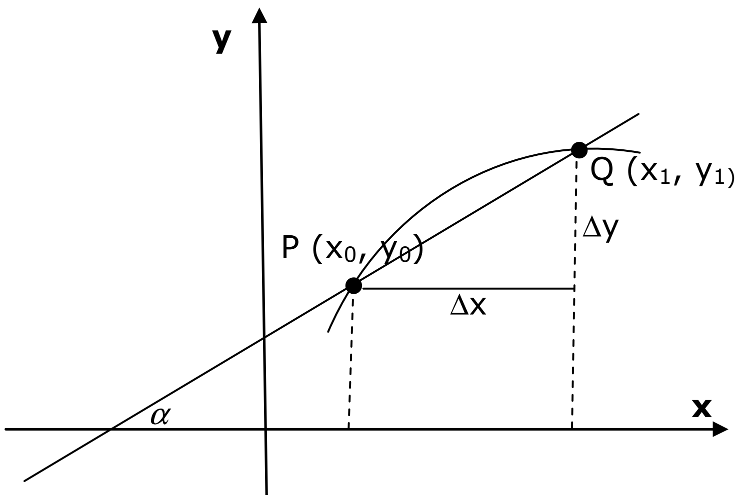
6) ¿Crees que se puede considerar la pendiente encontrada en el ítem 5) como la pendiente de la curva en el punto P?__________

7) Coloca ahora el punto Q en una posición más cercana a P en la gráfica 1. Dibuja la recta que une los puntos P y Q y analiza tu respuesta del ítem 6.

8) Procede de la misma forma que en el ítem 6, aproximando más aún el punto Q al punto P. ¿Cuál es tu conclusión en base a lo analizado en los ítems 5, 6 y 7?

9) Si Q se aproxima tanto a P de modo que $\Delta x \to 0$, ¿qué tipo de recta representaría la recta que une los puntos P y Q, en relación a la curva dada?_________________

Es importante notar que la pendiente de la recta secante a la curva que pasa por los P y Q no representa la pendiente de la curva en el punto P, ya que al variar la posición del punto Q, el valor de Δx puede aumentar o disminuir (en el caso de la figura estudiada, aumenta) y de ese modo la pendiente aumenta o disminuye.



k) ¿Qué conclusión sacas de la expresión $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ cuando $x_0 = 1$?____

l) Completa la tabla 5 que se presenta a continuación.

Δx	1	0,5	0,1	0,05	0,01	0,001
$x_1 = 2 + \Delta x$	3					
Δy	4					
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	4					

Tabla 5

m) ¿Cuál es el valor de x_0 utilizado en la tabla 5? ________

n) ¿Qué conclusión sacas de la expresión $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ para el valor de x_0 utilizado?__________________________

o) Completa la tabla 6 que se presenta a continuación.

Δx	1	0,5	0,1	0,05	0,01	0,001
$x_1 = 5 + \Delta x$	6					
Δy	36					
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	36					

Tabla 6

p) ¿Cuál es el valor de x_0 utilizado en la tabla 6? ________

q) ¿Qué conclusión sacas de la expresión $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ para el valor de x_0 utilizado?__________________________

Conclusión

Como la función $f(x) = x^2$ es continua, a valores de Δx cada vez más pequeños, le corresponden valores de Δy también cada vez más pequeños, lo cual implica que el cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tiende a tomar la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ cuando Δx tiende a cero, sin embargo el límite del cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tiende a un valor perfectamente determinado.

En los casos estudiados hemos notado que al considerar $x_0 = 1$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$, cuando $x_0 = 2$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4$ y cuando $x_0 = 5$, hemos obtenido $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 10$.

En general podemos decir que para la función $f(x) = x^2$ se tiene que el cociente incremental a partir de un valor x_0 está dado por $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$ y por lo tanto se tiene que $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0$.

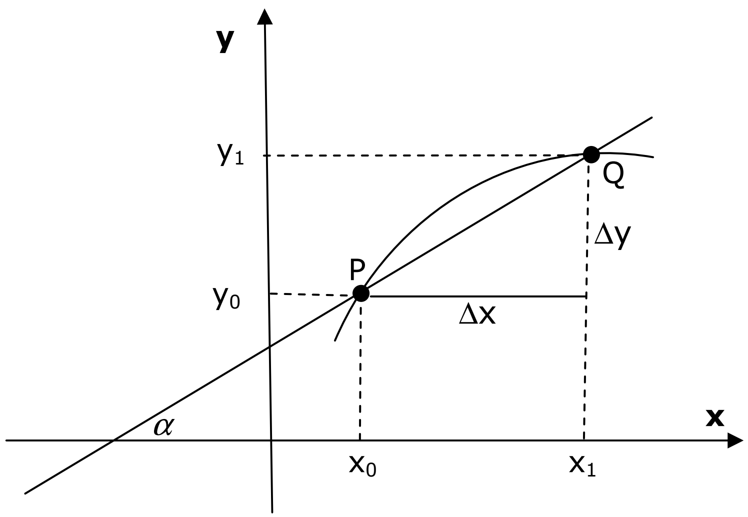
DERIVADAS

TALLER 5

El objetivo del Taller 5 es que los y las estudiantes comprendan el concepto de derivada de una función en un punto.

Derivada de una función en un punto.

1) Observa la gráfica que aparece a continuación.



Gráfica 1

2) Escribe las coordenadas de los puntos P y Q.______________

3) Recordando lo estudiado en Geometría Analítica, escribe la fórmula que representa la pendiente de la recta que pasa por los puntos P y Q.________________

4) ¿Qué nombre recibe la recta que pasa por P y Q cuando, como en el caso de la gráfica 1, corta a la curva en dos puntos?__________________

5) Según lo estudiado en los talleres anteriores, escribe mediante fórmulas el incremento de la abscisa y el incremento de la ordenada cuando un punto se mueve sobre la gráfica de f(x) desde el punto P al punto Q.__________________________