BICENTENARIO
EDUCATIVO

PARAGUAY TODOS Y TODAS

"Bicentenario de la Independencia Nacional: 1811 - 2011"

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CULTURA
Presidencia de la República del Paraguay

El Colegio, nuestro punto de encuentro

Material de distribución gratuita. Prohibida su venta

MÓDULO 4

Matemática

MÓDULO 4: FUNCIONES, LÍMITE Y CONTINUIDAD
Campaña de Apoyo a la Gestión Pedagógica a Docentes en Servicio - 2011

PARAGUAY TODOS Y TODAS
PARAGUAY BICENTENARIO

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CULTURA
Presidencia de la República del Paraguay

omapa
ORGANIZACIÓN MULTIDISCIPLINARIA DE APOYO A PROFESORES Y ALUMNOS

El Colegio, nuestro punto de encuentro

FICHA TECNICA

Presidente de la República
Fernando Lugo Méndez
Ministro de Educación y Cultura
Luis Alberto Riart Montaner
Viceministro de Educación para el Desarrollo Educativo
Héctor Salvador Valdez Alé
Viceministra de Educación para la Gestión Educativa
Diana Carolina Serafini Fernández
Directora General de Educación Media
Alcira Concepción Sosa Penayo
Directora de Bachillerato Científico
Ana Claudia Meza
Director de Bachillerato Técnico
Ramón Iriarte
Director Administrativo
Marcelo Esquivel
Coordinadora Unidad de Resignificación de la Educación Media:
Sara Raquel López Cristaldo
Elaboradoras:
Diana Giménez de von Lücken
Ingrid Wagener de Gauto

Bibliografía

1) **von Lücken, José Remberto**. Aritmética. Curso de Admisión Universidad Católica "Nuestra Señora de la Asunción". Copimar.
2) **Larsson; Hostetler; Edwars** (2002). Cálculo I. Editorial Pirámide. 7ª edición. Madrid.
3) **Stewart, James.** Cálculo. Concepto y Textos. (2006) Editorial Thomson. 3ª Edición. México.
4) http://www.csi-csif.es/andalucia/modules/mod_ense/revista/pdf/Numero_23/SERGIO_BALLESTER_SAMPEDRO01.pdf
5) http://www.biopsychology.org/apuntes/calculo/calculo1.htm
6) **Apuntes de clases de las autoras.** La mayoría de los ejercicios y problemas propuestos en este cuadernillo son de elaboración propia. Los mismos fueron creados por las autoras para el desarrollo de sus propias cátedras y han sido aplicados y validados durante sus prácticas de aula.

Índice

Reflexión final

Todos los conceptos profundizados en este material constituyen la base del "Cálculo", el cual, como ya sabemos, es indispensable para llevar adelante todo el desarrollo científico y tecnológico, primero al servicio de la Física y luego de otros campos.

Aquí enfatizamos nuevamente su importancia a través de lo expuesto por grandes estudiosos:

"El concepto más importante de todas las matemáticas es, sin dudarlo, el de función: en casi todas las ramas de la matemática moderna, la investigación se centra en el estudio de funciones". (Spivak)

"Los distintos objetos y fenómenos que observamos en la naturaleza están orgánicamente relacionados unos con otros; son interdependientes. El género humano conoce desde hace tiempo las relaciones más sencillas de esta clase, y este conocimiento se halla expresado en las leyes físicas. Estas leyes indican que las distintas magnitudes que caracterizan un fenómeno dado están tan íntimamente relacionadas que algunas de ellas quedan completamente determinadas por los valores de las demás... Fueron correspondencias de esta clase las que sirvieron de origen al concepto de función". (Aleksandrov)

12	13	14	15
D(f)= R - $\{5\}$ R(f)= R - $\{1\}$	D(f)= [-2,+ ∞) R(f)=R^-	D(f)=$[-2,+2]$ R(f)= $[-2,+2]$	D(f)= R - $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ R(f)= R - $\left\{\frac{1}{2}\right\}$

16	17	18
D(f)= R R(f)= $(-\infty,-1]$	D(f)= $[-\sqrt{3},+\sqrt{3}]$ R(f)= $[-\sqrt{3},0]$	D(f)= R - $\{3\}$ R(f)= R - $\{4\}$

Taller 9

1	2	3	4	5	6	7
sí	sí	sí	sí	no	sí	no

8	9	10	11	12	13	14
sí	sí	sí	no	no	sí *	sí *

(*) en el sistema ampliado de los números reales (R, $+\infty,-\infty$)

Taller 10

1	2	3	4	5	6	7
sí	sí	sí	sí	no	sí	no

8	9	10	11	12	13	14
sí	no	no	no	no	no	no

Introducción

Este cuadernillo ha sido elaborado para ser utilizado en las jornadas de la Campaña de Apoyo a la Gestión Pedagógica a Docentes en Servicio – 2011, en el Área de Matemática, con los y las docentes participantes.

En cada uno de los talleres, se desarrollan actividades a ser propuestas por los y las docentes a sus estudiantes, a fin de lograr la apropiación de los conceptos de Función, Límite y Continuidad por parte de los mismos.

Reflexión

El concepto de función es sumamente importante en Matemática y otras áreas, por sus múltiples aplicaciones en situaciones de la vida cotidiana.

Las funciones establecen relaciones entre magnitudes matemáticas, físicas, económicas, etc. Mediante las funciones podemos calcular magnitudes que dependen de otras y así resolver diferentes situaciones.

Hay muchos fenómenos relacionados entre sí mediante las funciones, por ejemplo, la velocidad que está en función al espacio y al tiempo, en Física; en Economía, la utilidad de una empresa que está en función a ingresos y costos de producción, etc.

Para poder llegar a la aplicación de las mismas es indispensable conocer conceptos que permitan comprender mejor su utilización. El objetivo que tenemos con la presentación de este material es iniciar a los y las estudiantes en la comprensión de conceptos, como el de función, límite y continuidad, sin los cuales no podrían continuar en el camino del Cálculo y así llegar a resolver situaciones que implican, por ejemplo, la utilización de derivadas de funciones.

Se propone como actividad formar grupos de 5 personas y escribir en una cartulina, en cada grupo, una función que se aplique en la vida cotidiana, dándole 5 valores distintos a la variable independiente y obteniendo los correspondientes valores de la variable dependiente. Luego, se entregará la cartulina al facilitador/facilitadora para que sea expuesta en la "galería de cuadros".

Respuestas a los ejercicios de los talleres

Taller 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
sí	no	sí	sí	sí	no	no	sí	no	no

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
no	sí	sí	no	no	sí	no	sí	sí	no

Taller 7

1	2	3	4
D(f)= R R(f) = R	D(f)= R R(f)=$R^+ \cup \{0\}$	D(f)= R R(f)=$[-2,+\infty)$	D(f)= $[-1,+\infty)$ R(f)=R^+

5	6	7
D(f)= R R(f)=$(-\infty,0] = R^- \cup \{0\}$	D(f)= R - $\{2\}$ R(f)= R - $\{0\}$	D(f)= $(-\infty,+\infty)$ R(f)= $[0,+\infty)$

8	9	10	11
D(f)= R R(f)=$[4,+\infty)$	D(f)= R - $\{-5\}$ R(f)=R - $\{0\}$	D(f)= R R(f)= $[+2,+\infty)$	D(f)= $(-\infty,4]$ R(f)= R^+

Según lo que hemos trabajado podemos sacar algunas conclusiones de manera intuitiva.
Decimos que el número real "L" es el límite de la función f(x) cuando x se aproxima (tiende a) un valor x_0, si al aproximarnos a x_0 por valores mayores y menores que x_0 (esto es por derecha e izquierda), f(x) se aproxima (tiende) a "L".
Habrás observado que en los ejercicios se han presentado diferentes situaciones:

- La función está definida en x_0 y tiene límite en dicho punto.
- La función no está definida en x_0, pero tiene límite en dicho punto.
- La función está definida en x_0 , pero no tiene límite en dicho punto.
- La función no está definida en x_0, y no tiene límite en dicho punto.

Lo importante para que f(x) tenga límite en el punto x_0, es que cuando x tiende x_0 por derecha e izquierda f(x) tienda al mismo valor (no importa en absoluto, que f(x) esté o no definida en x_0).

CONTINUIDAD DE FUNCIONES

TALLER 10

En el taller 10 se analiza el concepto de continuidad de una función. El taller se basa fundamentalmente en los resultados obtenidos en el taller 9.

Decimos en forma intuitiva que una función f(x) es continua si se la puede graficar de un solo trazo.
Más formalmente, decimos que una función f(x) es continua en el punto x_0, si satisface las tres condiciones siguientes:

a) f(x) está definida en el punto de abscisa x_0.
b) Existe el límite de f(x) en el punto x_0.
c) El límite de f(x) y la función valorada en x_0 tienen el mismo valor.

Analiza cada uno de los ejercicios del taller 9 y determina si las funciones dadas son o no continuas en los puntos indicados. Justifica en caso de no ser continua.

FUNCIONES

TALLER 1

El objetivo del Taller 1 es que el/la estudiante comprenda el significado de relación entre elementos de dos conjuntos dados. Los y las estudiantes deberán seguir las instrucciones dadas.

1) Dados los conjuntos $A=\{2,3,4,5,6\}$ y $B=\{2,4,6,8,9,10,11\}$, escribe todos los pares ordenados en los que aparezca como primera componente un elemento del conjunto A y como segunda componente un elemento del conjunto B, de modo que cumpla la siguiente condición: "la segunda componente debe ser el duplo de la primera".
2) En base al ítem 1, contesta las siguientes preguntas:
a) ¿Has utilizado todos los elementos de A? Justifica.
b) ¿Has utilizado todos los elementos de B? Justifica.

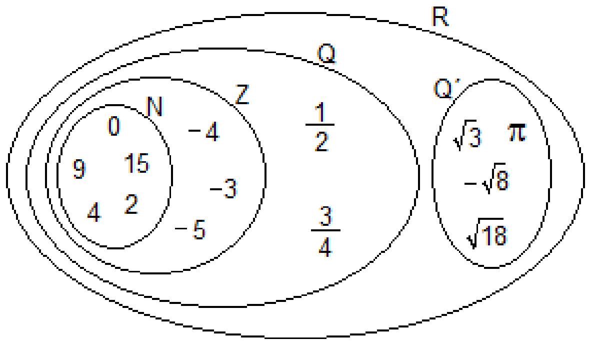
3) Dados los conjuntos $A=\{-4,-1,0,1,4,9\}$ y $B=\{0,1,2,3\}$, escribe todos los pares ordenados en los que aparezca como primera componente un elemento del conjunto A y como segunda componente un elemento del conjunto B de modo que cumpla la siguiente condición: "la segunda componente debe ser la raíz cuadrada de la primera".
4) En base al ítem 3, contesta las siguientes preguntas:
a) ¿Has utilizado todos los elementos de A? Justifica.
b) ¿Has utilizado todos los elementos de B? Justifica.

5) Dados los conjuntos $A=\{-2,-1,0,1,2,3\}$ y $B=\{0,1,2,4,9\}$, escribe todos los pares ordenados en los que aparezca como primera componente un elemento del conjunto A y como segunda componente un elemento del conjunto B de modo que cumpla la siguiente condición: "la segunda componente debe ser el cuadrado de la primera".
6) En base al ítem 5, contesta las siguientes preguntas:
a) ¿Has utilizado todos los elementos de A? Justifica.
b) ¿Has utilizado todos los elementos de B? Justifica.

Recuerda que:
El conjunto de números naturales es el que nos sirve para designar la cantidad de elementos que tiene un cierto conjunto.
Se representa por N = $\{0,1,2,3,...\}$.
Algunas características importantes son:

- Este conjunto tiene un primer elemento, el cero.
- Cada número natural tiene un siguiente único, que no es ninguno de los anteriores.
- Es un conjunto infinito, lo que está expresado por los puntos suspensivos.
- Entre dos números naturales en que uno es el siguiente del otro, no hay otros números naturales.

El conjunto de números enteros es el conjunto formado por los números naturales y los opuestos a los naturales distintos del cero. Se representa por Z = $\{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$.
El conjunto de número racionales es el conjunto de todos los números que pueden escribirse como fracción.
Se representa por Q.
El conjunto de los números irracionales es el conjunto de todos los números que nunca pueden escribirse como fracción.
Se representa por Q'.
El conjunto de números reales es el conjunto que incluye a los racionales e irracionales.
Se representa por R.
En un diagrama de Venn podemos representarlos de la siguiente forma.



3. $f(x) = x^2 - 3x + 4$, en la cercanía del punto de abscisa 1.

4. $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & si\, x \leq 2 \\ 4x-1 & si\ x>2 \end{cases}$ en la cercanía del punto de abscisa 2.

5. $f(x) = \begin{cases} 3x+2 & si\, x \leq 3 \\ 2x-4 & si\ x>3 \end{cases}$ en la cercanía del punto de abscisa 3.

6. $f(x) = \begin{cases} x^2+3 & si\, x \leq 0 \\ -2x+3 & si\ x>0 \end{cases}$ en la cercanía del punto de abscisa 0.

7. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+7}{x-2} & si\, x \neq 2 \\ 4 & si\ x=2 \end{cases}$ en la cercanía del punto de abscisa 2.

8. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x+3} & si\, x \neq -3 \\ -6 & si\, x=-3 \end{cases}$ en la cercanía del punto de abscisa -3.

9. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-16}{x-4} & si\, x \neq 4 \\ 10 & si\ x=4 \end{cases}$ en la cercanía del punto de abscisa 4.

10. $f(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$ en la cercanía del punto de abscisa 3.

11. $f(x) = \dfrac{2}{x}$ en la cercanía del punto de abscisa x = 0.

12. $f(x) = \dfrac{3}{x+1}$ en la cercanía del punto de abscisa x = -1.

13. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ en la cercanía del punto de abscisa x = 0.

14. $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2}$ en la cercanía del punto de abscisa 3.

NOCIÓN INTUITIVA DE LÍMITE

TALLER 9

Para cada una de las funciones dadas a continuación:
a) Construye una tabla de valores con aproximaciones por derecha (valores mayores) e izquierda (valores menores) a los puntos indicados en cada caso.
b) Determina si se aproximan o no al mismo valor numérico.
c) Grafica las funciones y analiza lo que sucede en la cercanía de los puntos que se indican.
d) Determina si la función está o no definida en los puntos indicados.
e) Determina si la función tiene o no límite en el punto indicado. Diremos que tiene límite si al aproximarnos por derecha e izquierda, la función se aproxima al mismo valor numérico.

1. $f(x) = 2x + 5$, en la cercanía del punto de abscisa 3.

Por izquierda

X	f(x)
2	
2,2	
2,4	
2,7	
2,8	
2,9	
2,99	
2,999	
2,9999	

Por derecha

x	f(x)
4	
3,8	
3,5	
3,2	
3,1	
3,01	
3,001	
3,0001	
3,00001	

En este caso la función $f(x) = 2x + 5$ está definida en $x = 3$ y $f(3) = 2.3 + 5 = 11$.

A partir del ítem 2 y en adelante, efectuar el mismo procedimiento seguido en el ítem 1.

2. $f(x) = x^2 + 4$, en la cercanía del punto de abscisa 2.

Como puedes observar, el conjunto de los naturales está contenido en el conjunto de los enteros. El conjunto de los enteros está contenido en el conjunto de los racionales. El conjunto de los racionales y el conjunto de los irracionales no tienen ningún elemento en común (se dice que los conjuntos son disjuntos). El conjunto de los reales está formado por los racionales e irracionales.
Es importante también destacar que en ocasiones nos interesa trabajar solamente con los enteros positivos, o negativos, o con los reales positivos o negativos.
Estos conjuntos los denotamos de la siguiente forma:
Enteros positivos: Z^+ Enteros negativos: Z^-
Reales positivos: R^+ Reales negativos: R^-

7) Dados los conjuntos A = R y B = R, escribe todos los pares ordenados en los que aparezca como primera componente un elemento del conjunto A y como segunda componente un elemento del conjunto B de modo que cumpla la siguiente condición: "la segunda componente debe ser el doble de la primera más 3".
8) En base al ítem 7, contesta las siguientes preguntas:
a) ¿Pudiste escribir todas las parejas posibles? Justifica
a) ¿Habrías utilizado todos los elementos de A? Justifica.
b) ¿Habrías utilizado todos los elementos de B? Justifica.

9) Dados los conjuntos A = Z y B = N, escribe todos los pares ordenados en los que aparezca como primera componente un elemento del conjunto A y como segunda componente un elemento del conjunto B de modo que cumpla la siguiente condición: "la segunda componente debe ser el triple de la primera más cuatro".

10) En base al ítem 9, contesta las siguientes preguntas:
a) ¿Pudiste escribir todas las parejas posibles? Justifica
a) ¿Habrías utilizado todos los elementos de A? Justifica.
b) ¿Habrías utilizado todos los elementos de B? Justifica.

11) Dados los conjuntos A = Z y B = Z, escribe todos los pares ordenados en los que aparezca como primera componente un elemento del conjunto A y como segunda componente un elemento del conjunto B de modo que cumpla la siguiente condición: "la segunda componente debe ser la mitad de la primera".

12) En base al ítem 11, contesta las siguientes preguntas:
a) ¿Pudiste escribir todas las parejas posibles? Justifica
a) ¿Habrías utilizado todos los elementos de A? Justifica.
b) ¿Habrías utilizado todos los elementos de B? Justifica.

La correspondencia entre los elementos de los conjuntos A y B que has establecido en cada uno de los ejemplos anteriores recibe el nombre de "**relación entre los elementos de dos conjuntos A y B".** Observa que en cada caso se dio una condición diferente para relacionar los elementos de A y B.

TALLER 2

El objetivo del Taller 2 es que el/la estudiante comprenda el concepto de función. Se utiliza una ficha de trabajo y se recurre a la técnica del espiral, ya que el/la estudiante debe utilizar lo aprendido en el Taller 1.

En cada uno de los siguientes ejercicios "x" representa un elemento del conjunto A e "y" un elemento del conjunto B. Los conjuntos A y B se definen en cada ítem, así como también las relaciones entre los elementos de los conjuntos dados. Te presentamos primero un ejemplo para que comprendas lo que debes realizar en cada caso, así como también el análisis correspondiente a cada uno de ellos. Además deberás responder algunas preguntas específicas que te ayudarán a comprender mejor el concepto de función.

Ejemplo

$A=\{2,3,4,5,6\}$; $B=\{2,4,6,8,9,10,11\}$. Los pares de la relación son de la forma (x, y) = (x, x-1).

Operaciones

a) (f+ g) (x)	aa) (f/ g) (x)
b) (f- g) (x)	bb) (f+ h) (x)
c) (f. g) (x)	cc) (f- h) (x)
d) (f/ g) (x)	dd) (f. h) (x)
e) (f+ h) (x)	ee) (f/ h) (x)
f) (f- h) (x)	ff) (f+ w) (x)
g) (f. h) (x)	gg) (f- w) (x)
h) (f/ h) (x)	hh) (f. w) (x)
i) (f+ w) (x)	ii) (f/ w) (x)
j) (f- w) (x)	jj) (f+ t) (x)
k) (f. w) (x)	kk) (f- t) (x)
l) (f/ w) (x)	ll) (f. t) (x)
m) (f+ t) (x)	mm)(f/ t) (x)
n) (f- t) (x)	nn) (w+ g) (x)
o) (f. t) (x)	oo) (w- g) (x)
p) (f/ t) (x)	pp) (w. g) (x)
q) (w+ g) (x)	qq) (w/ g) (x)
r) (w- g) (x)	rr) (t+ g) (x)
s) (w. g) (x)	ss) (t- g) (x)
t) (w/ g) (x)	tt) (t. g) (x)
u) (t+ g) (x)	uu) (t/ g) (x)
v) (v. h) (x)	vv) (v+ h) (x)
w) (v/ h) (x)	ww) (v- h) (x)
x) (f+ g) (x)	xx) (v. h) (x)
y) (f- g) (x)	yy) (v/ h) (x)
z) (f. g) (x)	

1) Considera las funciones $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = +\sqrt{x}$.

2) Calcula el valor de f(x) y de g(x) en cada uno de los valores de x que se indican (si es posible). x = 1, x = 4, x = 0, x = 2,5, x = -1, x = -4.

3) En base a los resultados del ítem 2) calcula (si es posible):

f(1) + g(1)
f(4) + g(4)
f(0) + g(0)
f(2,5) + g(2,5)
f(-1) + g(-1)
f(-4) + g(-4)

4) ¿Pudiste realizar todas las sumas? ¿Por qué?

5) Con los datos de los ítemes 1 y 2, calcula

f(1) - g(1)
f(4) . g(4)
f(0) / g(0)

6) ¿Pudiste realizar todas las operaciones? ¿Por qué?

7) ¿Cuál crees que es la condición necesaria para que se pueda realizar la operación entre dos funciones?

Dadas dos funciones f(x) y g(x) con dominios D(f) y D(g) respectivamente, se define la suma, la diferencia , el producto y el cociente entre las mismas de la siguiente forma:

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ con $D(f+g) = D(f) \cap D(g)$
$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ con $D(f-g) = D(f) \cap D(g)$
$(f\,g)(x) = f(x).\ g(x)$ con $D(f\,g) = D(f) \cap D(g)$
$(f/g)(x) = f(x)/g(x)$
con $D(f/g) = D(f) \cap D(g) - \{x / g(x) = 0\}$

8) Dadas las siguientes funciones, realiza las operaciones indicadas. Determina además el dominio de cada una de ellas y el dominio en el que puedan efectuarse las operaciones pedidas.

$f(x) = 3x - 2$;	$g(x) = x^2$	$h(x) = x + 5$
$v(x) = 2 - x^2$	$w(x) = \frac{1}{x}$	$t(x) = +\sqrt{x+1}$

Como habíamos dicho que "y" es un elemento de B, debemos buscar cuáles son los elementos de B que se pueden obtener a partir de los elementos de A mediante la fórmula $y = x - 1$, y solamente esos elementos podrán ser los utilizados para escribir las parejas de la forma (x, y).

Observa que,

si x = 2, entonces y = 2 - 1, pero $1 \notin B$, entonces el par (2,1) no se puede formar.

si x = 3, entonces y = 3 - 1 = 2 y $2 \in B$, entonces el par (3,2) sí se puede formar.

si x = 4, entonces y = 4 - 1 = 3 y $3 \notin B$, entonces el par (4,3) no se puede formar.

si x = 5, entonces y = 5 - 1 = 4 y $4 \in B$, entonces el par (5,4) sí se puede formar.

si x = 6, entonces y = 6 - 1 = 5 y $5 \notin B$, entonces el par (6,5) no se puede formar.

"En la relación dada, no todos los elementos del conjunto A pudieron relacionarse con algún elemento del conjunto B" .

Ejercicios

1) $A = \{0, 1, 4, 9\}$, $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Los pares de la relación son de la forma $(x, y) = (x, \pm\sqrt{x})$.

¿Cuántas parejas pudiste formar?
¿Pudiste relacionar todos los elementos de A con alguno de B?
Cada elemento de A, ¿con cuántos elementos de B se relacionó?

2) A = Z, B = N. Los pares de la relación son de la forma $(x, y) = (x, x - 2)$.

¿Cuántas parejas pudiste formar? Justifica
¿Pudiste relacionar todos los elementos de A con alguno de B? Justifica.
Los elementos de A que pudieron relacionarse con alguno de B, ¿con cuántos lo hicieron?

3) A = N, B = N. Los pares de la relación son de la forma $(x, y) = (x, x^2)$.

¿Cuántas parejas pudiste formar? Justifica
¿Pudiste relacionar todos los elementos de A con alguno de B?. Justifica.
Los elementos de A que pudieron relacionarse con alguno de B, ¿con cuántos lo hicieron?

Observa que en cada uno de los ejercicios anteriores las conclusiones fueron distintas. A continuación te presentamos un tipo muy particular de relación entre dos conjuntos dados.

Una **función** es una relación entre los elementos de dos conjuntos A y B, tal que **a cada elemento del conjunto A** le corresponde un **único elemento del conjunto B.**

Las funciones se denotan generalmente mediante la letra "f" y si "x" es un elemento de A e "y" un elemento de B se escribe: y = f(x).
Como es muy importante saber cuáles son los conjuntos A y B y la relación entre los elementos de dichos conjuntos, se escribe: $f : A \to B$

$$x \mapsto y$$

o también $f : A \to B$

y = f(x) indicando la relación entre "x" e "y".

Si analizamos los tres ejercicios que has desarrollado, puedes observar que:
a) en el primero, cada elemento de A está relacionado con dos de B y eso **contradice la definición de función que establece que debe relacionarse con un único elemento del segundo conjunto**, por lo tanto, podemos decir que es una relación pero **no es una función.**
b) en el segundo, podemos tomar como contraejemplo el elemento "1" de A, que no se relaciona con ninguno de B, ya que $1 - 2 = -1$, y $-1 \notin B = \mathbb{N}$. En este caso, decimos que la relación dada **no es una función porque no todos los elementos de A = Z se relacionan con algún elemento de B**.

8) Al final del trabajo se hace una plenaria exponiendo las respuestas obtenidas, de modo que el/la docente pueda corregir los posibles errores cometidos.

Fichas propuestas

$f(x) = 3x + 4$	**1**	$f(x) = +\sqrt{x^2+4}$	**10**
$f(x) = x^2$	**2**	$f(x) = +\sqrt{4-x}$	**11**
$f(x) = x^2 - 2$	**3**	$f(x) = \dfrac{x}{x-5}$	**12**
$f(x) = +\sqrt{x-1}$	**4**	$f(x) = -\sqrt{x+2}$	**13**
$f(x) = -x^2$	**5**	$f(x) = +\sqrt{4-x^2}$	**14**
$f(x) = \dfrac{1}{x-2}$	**6**	$f(x) = \dfrac{x}{2x-1}$	**15**
$f(x) = +\sqrt{x^2-1}$	**7**	$f(x) = -\sqrt{x^2+1}$	**16**
$f(x) = x^2 + 4$	**8**	$f(x) = -\sqrt{3-x^2}$	**17**
$f(x) = \dfrac{1}{x+5}$	**9**	$f(x) = \dfrac{4x-2}{x-3}$	**18**

OPERACIONES CON FUNCIONES

TALLER 8

En el taller 8 se estudian las operaciones con funciones y las condiciones que existen para que las mismas puedan efectuarse.

En símbolos $R(f) = [3, +\infty)$.

c) El rango de la función $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ tiene mayor dificultad para ser determinado. Una forma que en ocasiones resulta sencilla en estos casos es la que describimos a continuación.

c .1) Escribimos la función de la siguiente forma: $y = \dfrac{1}{x-2}$.

c.2) Despejamos "x" en función de "y" : $y(x - 2) = 1$, entonces: $y x - 2y = 1$, así: $y x = 1 + 2y$.

c.3) Finalmente $x = \dfrac{1+2y}{y}$. Recordando que el denominador de una fracción no puede ser nulo, tenemos que el valor que "y" no puede tomar es "cero", por lo tanto f(x) nunca podrá tomar dicho valor.

c.4) Tenemos así que $R(f) = R - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

d) El rango de la función $f(x) = +\sqrt{x}$ es el conjunto de los números reales positivos y el cero, ya que se consideran únicamente las raíces positivas y la raíz del cero.
En símbolos $R(f) = R^{+} \cup \{0\} = [0, +\infty)$.

Desarrollo del taller

1) El/ la docente prepara fichas con funciones.
2) Se indica a los y las estudiantes que deben determinar el dominio y el rango de dichas funciones.
3) Se reparten las fichas a los y las estudiantes.
4) Se forman dos círculos concéntricos con la misma cantidad de estudiantes en cada uno.
5) Los y las estudiantes resuelven sus ejercicios en forma individual durante el tiempo que el/la docente crea apropiado y luego van rotando los del círculo de afuera o los de adentro según las indicaciones del/la docente.
6) Cada estudiante debe copiar en su hoja el ejercicio de su compañero/a y resolverlo. Luego discuten la solución obtenida por ambos.
7) Si es posible, los y las estudiantes deben compartir con todos los/as compañeros/as del otro círculo.

Observa que existen muchos otros elementos de A que no se relacionan con alguno de B.
c) en el tercero, todos los números naturales al ser elevados al cuadrado dan como resultado un único número natural para cada caso, por lo que **cada elemento de A = N está relacionado con un único elemento de B = N, luego podemos decir que la relación definida es una función**. En símbolos podemos escribir que: $f: N \to N$ **es una función.**
$f(x) = x^2$

TALLER 3

El Taller 3 permitirá a el/la docente evaluar la comprensión de los conceptos de relaciones y funciones. En este punto, es interesante realizar una evaluación de dichos conceptos; para ello, se propone un trabajo individual.

PROPUESTA DE TRABAJO INDIVIDUAL

IDENTIFICACIÓN DE FUNCIONES

Determina si las relaciones dadas a continuación son o no funciones según los conjuntos que se indican. Justifica en caso de no serlo. Escribe tu respuesta en el recuadro que aparece al final. Cuando termines tu trabajo, el o la docente te brindará una tablita con las respuestas correctas. Pégala en tu hoja y compara con tus respuestas.

1) f: $N \to N$ $f(x) = 2x$	11) f: $Z \to Z^+$ $f(x) = +\sqrt{(x-1)}$
2) f: $Z \to N$ $f(x) = x+3$	12) f: $R \to R$ $f(x) = 7x + 2$
3) f: $N \to Z$ $f(x) = 2x+4$	13) f: $R \to R$ $f(x) = x^2 - 5$
4) f: $Z \to Z$ $f(x) = x^2$	14) f: $R \to R$ $f(x) = 2/(x-4)$
5) f: $Z \to N$ $f(x) = x^2$	15) f: $R \to R - \{-3\}$ $f(x) = x/(x+3)$
6) f: $Z^+ \to Z^-$ $f(x) = -x+3$	16) f: $R \to R$ $f(x) = x/(x^2+2)$
7) f: $Z \to Z$ $f(x) = x/3$	17) f: $R \to R$ $f(x) = +\sqrt{(x-5)}$
8) f: $Z \to Q$ $f(x) = (2x+1)/x$	18) f: $R^+ \to R$ $f(x) = +\sqrt{(x+7)}$
9) f: $Z^+ \to Z$ $f(x) = +\sqrt{x}$	19) f: $R^- \to R^+$ $f(x) = +\sqrt{-x}$
10) f: $Z \to Z^-$ $f(x) = -\sqrt{x}$	20) f: $R \to R$ $f(x) = \pm\sqrt{(x^2+1)}$

Conceptos teóricos

El dominio de una función f(x) es el conjunto de todos los valores "x" para los cuales la función está definida.
Se simboliza por D(f).

Ejemplos

a) El dominio de $f(x) = 2x + 5$ es el conjunto de todos los números reales, ya que "x" puede tomar cualquier valor real.
En símbolos: $D(f) = R = (-\infty, +\infty)$

b) El dominio de la función $f(x) = x^2 + 3$ es el conjunto de los números reales, ya que "x" puede tomar cualquier valor real.
En símbolos: $D(f) = R = (-\infty, +\infty)$

c) El dominio de la función $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ es el conjunto de los números reales, excepto el 2, ya que en dicho valor el denominador se anula y la división por cero no está definida.
En símbolos: $D(f) = R - \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

d) El dominio de la función $f(x) = +\sqrt{x}$ es el conjunto de los números reales positivos y el cero, ya que la raíz cuadrada de números negativos no está definida en el conjunto de los números reales.
En símbolos: $D(f) = R^+ \cup \{0\} = [0, +\infty)$.

El rango o recorrido de una función f(x) es el conjunto de todos los valores "y" que puede llegar a tomar la función. Se simboliza por R (f).

a) El rango de $f(x) = 2x + 5$ es el conjunto de todos los números reales, ya que "y" puede tomar cualquier valor real.
En símbolos $R(f) = R = (-\infty, +\infty)$.

b) El rango de la función $f(x) = x^2 + 3$ es el conjunto de los números reales mayores o iguales a 3, ya que x^2 es siempre mayor o igual a cero y por lo tanto el menor valor que puede tomar la expresión $x^2 + 3$ es cuando "x" toma el valor cero.

FUNCIÓN LINEAL

TALLER 5
Tiene la forma ax + b con $a \neq 0$ y representa una recta.

Ejercicios
Representa gráficamente cada una de las funciones dadas a continuación y analiza la variación en relación a la función f(x) = x.

a) f (x) = 2 x   b) f (x) = - 3 x   c) f (x) = x + 2
d) f (x) = x - 3   e) f (x) = 2x - 1   f) f(x) = - x + 7

FUNCIÓN CONSTANTE

TALLER 6
Tiene la forma f(x) = k, siendo k un número real cualquiera.
Ejemplos
a) f(x) = 2   b) f(x) = -4   c) f(x) = 0

¿Qué sucede en cada uno de los casos anteriores al variar la "x"? Grafica las tres funciones y sacarás una importante conclusión.

En la función constante, sin importar el valor que tome x, siempre f(x) = K

DOMINIO Y RANGO DE FUNCIONES.

TALLER 7

En el Taller 7 se estudia el dominio y rango de funciones.
En primer lugar, en base a los talleres anteriores, se trabaja el concepto y luego se realiza la técnica de los círculos concéntricos que permitirá que los estudiantes compartan sus conocimientos con los demás y practiquen la técnica de co-evaluación.

RESPUESTAS

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

FUNCIÓN CUADRÁTICA

TALLER 4

Los Talleres 4, 5 y 6 presentan el estudio de diferentes tipos de funciones y las variaciones de las mismas. Con estos talleres se practica nuevamente la representación gráfica en el plano cartesiano y mediante la misma se analiza la variación de las funciones.

Tiene la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$. Representa una parábola con la concavidad hacia arriba si a > 0 y con la concavidad hacia abajo si a < 0.

Grafica la función $f(x) = x^2$.
¿Qué valores puede tomar la variable x?
¿Qué valores puede llegar a tomar la variable y?

Representa cada una de las funciones que aparecen a continuación. Analiza en cada caso la variación que puedes observar en relación a la función $f(x)=x^2$. (En cada uno de los gráficos debes volver a graficar $f(x) = x^2$, pues te servirá para hacer la comparación).

Observación: el análisis que se realizará con la función cuadrática puede hacerse con cualquier función estudiada.

a) $f(x) = x^2 + 3$
¿Qué valores puede tomar la variable x?
¿Qué valores puede llegar a tomar la variable y?

Análisis

b) $f(x) = x^2 - 4$
¿Qué valores puede tomar la variable x?
¿Qué valores puede llegar a tomar la variable y?

Análisis

c) $f(x) = -x^2$
¿Qué valores puede tomar la variable x?
¿Qué valores puede llegar a tomar la variable y?

Análisis

d) $f(x) = 2x^2$
¿Qué valores puede tomar la variable x?
¿Qué valores puede llegar a tomar la variable y?

Análisis

e) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$
¿Qué valores puede tomar la variable x?
¿Qué valores puede llegar a tomar la variable y?

Análisis

f) $f(x) = (x - 2)^2$
¿Qué valores puede tomar la variable x?
¿Qué valores puede llegar a tomar la variable y?

Análisis

g) $f(x) = (x + 3)^2$
¿Qué valores puede tomar la variable x?
¿Qué valores puede llegar a tomar la variable y?

Análisis

h) $f(x) = x^2 + 6x + 9$
¿Qué valores puede tomar la variable x?
¿Qué valores puede llegar a tomar la variable y?

Análisis