

# 3°

Educación Media  
Plan Común

Curso

# Matemática

## Guía didáctica para docente

Serie curricular **panambi**

MATERIAL DE  
DISTRIBUCIÓN  
GRATUITA  
PROHIBIDA SU  
COMERCIALIZACIÓN

  
**Educación**  
Tarea de todos  
Paraguay Katupyry



**TEKOMBO'E  
HA ARANDUPY**  
MOTENONDEHA  
MINISTERIO DE  
**EDUCACIÓN  
Y CULTURA**

**TETÃ REKUÁI**  
**GOBIERNO NACIONAL**  
Jajapo ñande raperã ko'ãga guive  
Construyendo el futuro hoy

**Paraguay. Ministerio de Educación y Cultura**  
Guía didáctica para docente.  
Matemática.  
3.º curso - Educación Media  
2016

TODOS LOS DERECHOS RESERVADOS © 2016  
Ministerio de Educación y Cultura

Queda prohibida cualquier forma de reproducción, transmisión o archivo en sistemas recuperables del presente material, ya sea para su uso privado o público, por medios mecánicos, electrónicos, electroestáticos, magnéticos o cualquier otro, total o parcialmente, con o sin finalidad de lucro, salvo expresa autorización del MEC.

**Presidente de la República**

Horacio Manuel Cartes Jara

**Ministra de Educación y Cultura**

Marta Lafuente

**Viceministra de Educación para la Gestión Educativa**

Myrian Mello

**Directora General de Currículum, Evaluación y Orientación**

María Gloria Pereira de Jacquet

**Director General de Educación Media**

Arnaldo Ramón Liuzzi Velázquez

**Silveria Concepción Laguardia Viñales**, Directora de Currículum

**Diana Elena De Giacomini de Silva**, Jefa del Departamento de Apoyo para la Implementación Curricular en Medios Educativos

**Zonia Maricel Centurión Benítez**, Jefa del Departamento de Diseño Curricular

**Maura Graciela López Jara**, Jefa del Departamento de Evaluación Curricular

**María Isabel Roa**, Jefa del Departamento de Enseñanza de Lenguas

**Elaboradores**

Nélida Centurión Acha

María Elena Melgarejo de Acosta

Rutilia Ramírez Sánchez

**Revisión y ajustes**

Zonia Maricel Centurión Benítez

Carmen Susana Benítez Prieto

Sixta María Sosa Araujo

Sonia Raquel Martínez Hermosilla

Dalia Rocio Larrosa de Moreno

**Diseño Editorial**

Víctor Ramón López Amarilla

**Diseño y diagramación**

AGR S.A. Servicios Gráficos



## PRESENTACIÓN

---

Estimados colegas:

Compartimos con ustedes y las familias el mutuo interés de que los estudiantes de la Educación Media mejoren la calidad de sus aprendizajes. Con el afán de colaborar en el mejor uso posible de los libros de textos, el Ministerio de Educación y Cultura ofrece esta Guía Didáctica, cuyo contenido explica la organización de los mencionados libros y propone actividades para orientar su uso adecuado.

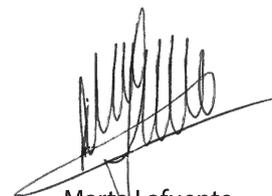
Es importante que esta guía se constituya en una herramienta pedagógica, ya que la misma contempla los lineamientos y las recomendaciones didácticas que orientan la planificación del docente. Por tanto, su uso no limitará la creatividad y el entusiasmo de generar otras propuestas innovadoras.

En el horizonte de la Agenda Educativa 2013 - 2018 se propone el mejoramiento de las condiciones y oportunidades para el aprendizaje, en el marco del aseguramiento de la calidad de la educación. Esta meta educativa se logrará con el compromiso asumido por cada uno de los actores educativos quienes interactúan directamente con los estudiantes en las distintas instituciones educativas del país.

La tarea de enseñar requiere de amor y ciencia, porque estamos educando seres humanos en la integralidad de su ser; a los educadores se nos encomienda la noble y valiosa misión de contribuir al desarrollo personal y social de nuestros estudiantes y de constituirnos en guías y orientadores de sus vidas en formación. Como adultos, somos garantes del cumplimiento de sus derechos y en ese sentido, ofrecerles una educación de calidad es nuestro compromiso.

Les recomiendo utilizar esta guía didáctica de la mejor manera posible y enriquecerla sobre la base de sus experiencias. Deseo que la tarea de educar les sea gratificante y se sientan cada vez más comprometidos con la misión de formar mejores seres humanos y ciudadanos actores de las transformaciones que requiere nuestro país.

Reciban de mi parte el reconocimiento y la admiración por su tarea desafiante, compleja y humanizante. Ndaréiri opavave ñandereko hesápe: mbo'éhára ningo omba'apo tesapé'ará. Upévare arako'ére hi'aiténte ñanderapere ñanembojuruvy jahecha rupi hope jera ñane remimbo'ekuéra kerapoty.



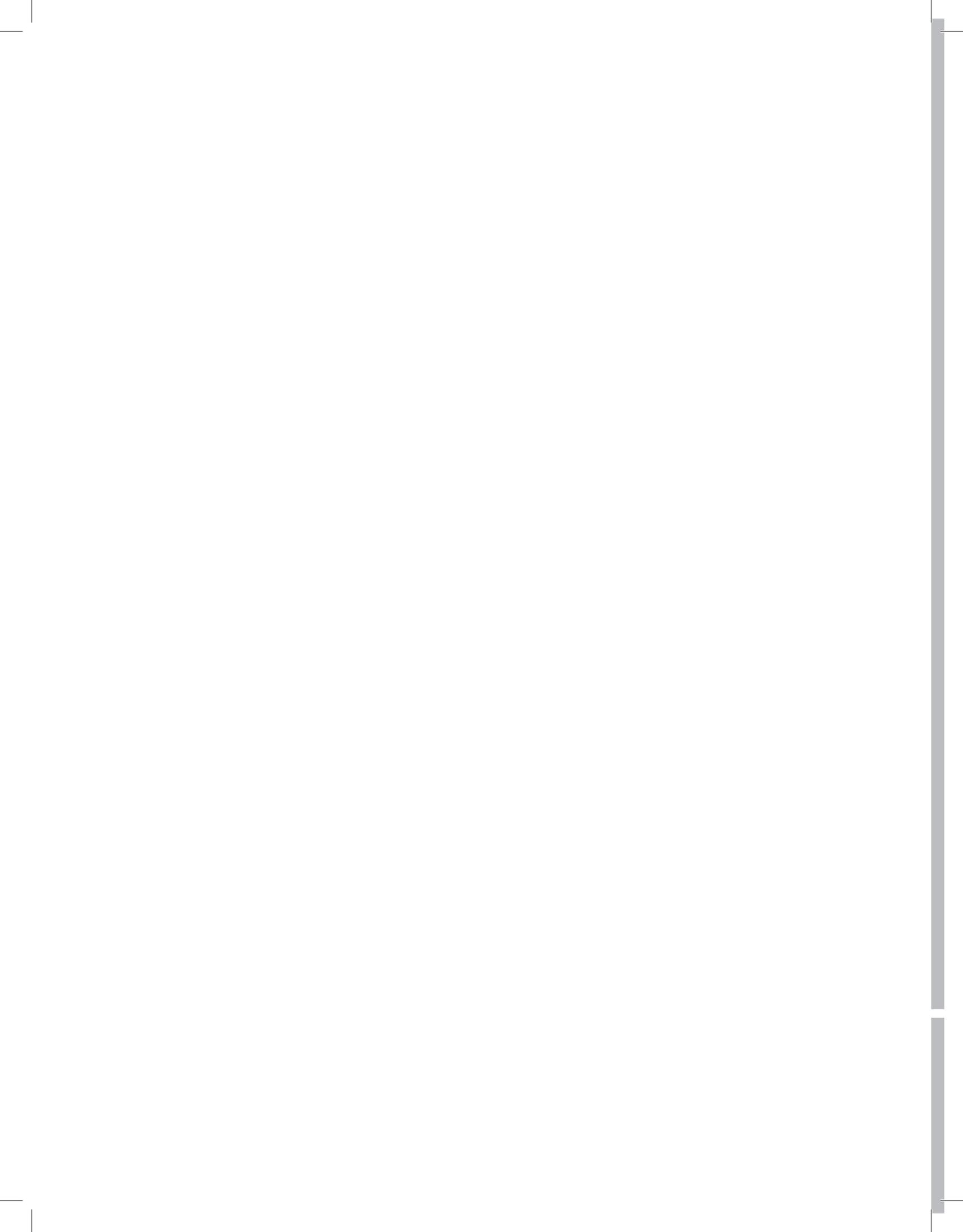
Marta Lafuente  
Ministra  
de Educación y Cultura





# Índice

<b>1. Cuadro descriptivo de las unidades de la Guía «Matemática 3».....</b>	<b>9</b>
<b>2. Desarrollo de las unidades .....</b>	<b>13</b>
<b>2.1 Unidad 1: Sucesiones y progresiones .....</b>	<b>13</b>
• Analiza sucesiones presentes en conjuntos estudiados.	
• Formula y resuelve situaciones problemáticas donde se apliquen conceptos de progresiones aritméticas y geométricas.	
<b>2.2 Unidad 2: Límite .....</b>	<b>18</b>
• Determina el límite de funciones en un punto y en el infinito.	
• Resuelve límites indeterminados.	
• Aplica el límite en la determinación de las características de una función.	
<b>2.3 Unidad 3: Derivadas .....</b>	<b>22</b>
• Formula y resuelve situaciones problemáticas en las que se aplique el concepto de derivada.	
• Determina la derivada de distintos órdenes de funciones algebraicas, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.	
• Interpreta las características de una función, usando derivadas.	
• Formula y resuelve problemas de optimización empleando derivadas.	
<b>3. Estrategias de aprendizaje .....</b>	<b>31</b>
<b>4. El método Heurístico en la resolución de problemas, según George Polya .....</b>	<b>45</b>
<b>Bibliografía sugerida.....</b>	<b>48</b>



# 1

## **Cuadro descriptivo de las unidades de la Guía «Matemática 3»**



# 1 Cuadro descriptivo de las unidades de la Guía «Matemática 3»

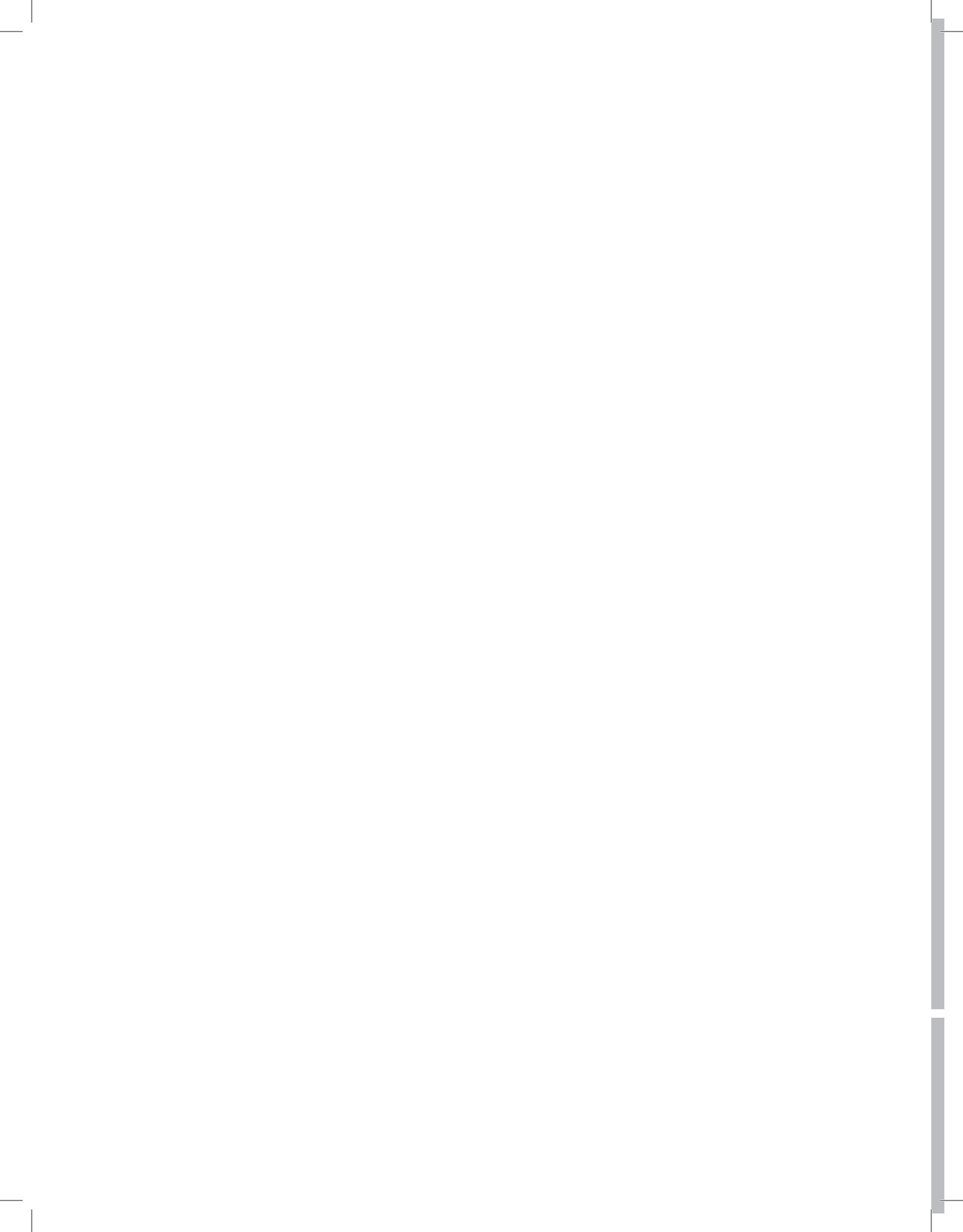
<b>COMPETENCIA DEL ÁREA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA</b>	Planteen y resuelvan problemas con actitud crítica y ética, utilizando el pensamiento lógico y el lenguaje matemático para formular, deducir y realizar inferencias que contribuyan al desarrollo personal y social.
<b>UNIDAD</b>	<b>CAPACIDADES</b>
<b>1. Sucesiones y progresiones</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Analiza sucesiones presentes en conjuntos estudiados.</li><li>• Formula y resuelve situaciones problemáticas donde se apliquen conceptos de progresiones aritméticas y geométricas.</li></ul>
<b>2. Límite</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Determina el límite de funciones en un punto y en el infinito.</li><li>• Resuelve límites indeterminados.</li><li>• Aplica el límite en la determinación de las características de una función.</li></ul>
<b>3. Derivadas</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Formula y resuelve situaciones problemáticas en las que se aplique el concepto de derivada.</li><li>• Determina la derivada de distintos órdenes de funciones algebraicas, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.</li><li>• Interpreta las características de una función, usando derivadas.</li><li>• Formula y resuelve problemas de optimización empleando derivadas.</li></ul>



**COMPETENCIA ESPECÍFICA DE LA DISCIPLINA**

Formula y resuelve situaciones problemáticas que involucren la utilización de conceptos, operaciones, teoremas y propiedades matemáticas del Álgebra, la Trigonometría, la Geometría Analítica y el Cálculo, aplicadas a la modelización de situaciones de la vida real.

TEMAS	Articulación con otros temas matemáticos	Articulación con otras disciplinas
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Sucesión. Concepto.</li> <li>• Clasificación: creciente, decreciente, constante.</li> <li>• Término general.</li> <li>• Término n-ésimo.</li> <li>• Número de términos.</li> <li>• Razón.</li> <li>• Primer término.</li> <li>• Suma de "n" términos.</li> </ul>	<p>Números racionales. Polígonos regulares. Expresiones algebraicas. Suma de los ángulos interiores de un triángulo y de un cuadrilátero. Logaritmo. Interés compuesto. Porcentaje. Teorema de Pitágoras. Triángulo de Sierpinski.</p>	<p>Matemática Financiera. Geometría. Economía.</p>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Concepto intuitivo de límite.</li> <li>• Límites laterales.</li> <li>• Propiedades de los límites.</li> <li>• Indeterminaciones cero sobre cero (funciones polinómicas, radicales, trigonométricas) e infinito sobre infinito.</li> <li>• Continuidad.</li> <li>• Discontinuidad: tipos de discontinuidad.</li> <li>• Asíntotas verticales y horizontales.</li> <li>• Recta tangente como límite de rectas secantes.</li> </ul>	<p>Factorización. Circunferencia. Sucesiones. Números reales. Perímetros y áreas de figuras geométricas. Función lineal y cuadrática. Funciones trigonométricas. Volumen de un cuerpo. Precio promedio. Porcentaje. Plano cartesiano. Logaritmo.</p>	<p>Matemática Financiera. Ciencias Naturales</p>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Derivada como pendiente de la recta tangente en un punto.</li> <li>• Derivada como límite del cociente incremental.</li> <li>• Reglas prácticas de derivación.</li> <li>• Regla de la cadena.</li> <li>• Derivadas sucesivas.</li> <li>• Regla de L'Hopital.</li> <li>• Rectas tangente y normal en un punto.</li> <li>• Criterios de la primera y la segunda derivada.</li> <li>• Puntos críticos (máximo y mínimo).</li> <li>• Puntos de inflexión.</li> <li>• Concavidad y convexidad.</li> <li>• Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.</li> <li>• Asíntotas.</li> <li>• Representación gráfica de la derivada de una función.</li> </ul>	<p>Expresiones algebraicas. Tasa de variación media. Plano cartesiano. Funciones lineales, cuadráticas, cúbicas y cuárticas. Área de la circunferencia. Pendiente o tangente trigonométrica. Ecuación de la recta. Funciones trigonométrica, exponencial y logarítmica. Velocidad y aceleración instantánea. Números reales. Área lateral, total y volumen del prisma.</p>	<p>Física Economía Matemática Financiera</p>



# 2

## **Desarrollo de las unidades «Matemática 3»**



## 2 Desarrollo de las unidades

### UNIDAD 1

#### 2.1

### Sucesiones y progresiones

#### 2.1.1. Capacidades

- Analiza sucesiones presentes en conjuntos estudiados.
- Formula y resuelve situaciones problemáticas donde se apliquen conceptos de progresiones aritméticas y geométricas.

#### 2.1.2. Temas

- Sucesión. Concepto.
- Clasificación: creciente, decreciente, constante.
- Término general.
- Término  $n$ -ésimo.
- Número de términos.
- Razón.
- Primer término.
- Suma de " $n$ " términos.

#### 2.1.3. Evaluación diagnóstica

Antes de iniciar el trabajo con esta unidad vamos a evaluar a través de una prueba diagnóstica, los conocimientos previos que tienen los alumnos y las alumnas para trabajar sucesiones y progresiones.

#### 2.1.4. Página de apertura

Presentamos la unidad con los números de Fibonacci para introducir el tema de sucesiones. Sugerimos el estudio de la sucesión de parejas de conejos formadas en seis meses propuestas por Fibonacci, para luego elaborar un diagrama de cómo sería la reproducción de conejos hasta el mes de agosto.

#### 2.1.5. Abordaje de los temas

Partimos de una situación problemática concreta que resolvemos siguiendo los pasos de Polya. Analizamos el mosaico que se forma en las baldosas del patio de un colegio, contamos el número de baldosas blancas y negras, registramos en una tabla para expresar en forma de sucesión y luego llegamos al término general.

Trabajamos el tema de sucesiones finitas e infinitas con las sucesiones numéricas descubiertas por los seres humanos a lo largo de la historia, utilizando patrones numéricos o no numéricos para encontrar los términos de la sucesión.

Determinamos la ley de formación a partir de ejemplos. El método de diferencias finitas facilita la obtención del término general.

El concepto tanto de progresión aritmética como geométrica introducimos a través de una situación problemática. Deducimos la fórmula del término general y la suma de los términos de cada una de las progresiones. Luego trabajamos la interpolación de medios aritméticos y geométricos, considerando una situación problemática.

Las **Actividades de fijación y retroalimentación** son un banco de ítems que puede ser enriquecido por el docente.

#### ¿Cómo trabajar la interdisciplinariedad?

Resuelve la siguiente situación problemática:

En un cultivo de cierto tipo de bacterias bajo determinadas condiciones, las mismas triplican su volumen cada día. Si el volumen inicial fue de  $5 \text{ cm}^3$  y el 5.º día fue de  $405 \text{ cm}^3$ , ¿Qué volumen tenía en el 2.º, 3.º y 4.º día? ¿Qué nos dice el término central?

Una vez resuelto este problema, proponemos la realización de la siguiente actividad:

- Visitar el CRA e investigar en textos de Ciencias Naturales y Salud informaciones sobre las bacterias:
  - a. ¿Qué son las bacterias?
  - b. ¿Cómo se clasifican las bacterias?
  - c. ¿Cuáles son las condiciones en que se multiplican?
  - d. ¿Qué tipo de bacteria produce enfermedades? Nombra dos de ellas

Elaborar un informe y presentar al profesor/a del área.



La **Autoevaluación** contiene problemas que involucran las progresiones aritméticas y geométricas. Es importante realizar periódicamente la autoevaluación con el propósito de que los alumnos y las alumnas se aseguren de los temas dados y además fijen los conocimientos y las actitudes que serán evaluados en las pruebas sumativas. Encontraremos este apartado al término de cada unidad didáctica.

Bajo el título de **Resumimos** se presenta una síntesis de los conceptos fundamentales desarrollados en la unidad.

El **tratamiento de los transversales** se visualiza:

Se propone «el análisis sobre las ventajas y desventajas de comprar al contado», lo que permite trabajar el desarrollo del pensamiento crítico y productivo. Se presenta una actividad de investigación sobre las «características del agua potable y de la contaminada» que responde a la educación ambiental.

### 2.1.6. Algunos indicadores de evaluación

Corresponde a cada profesor o profesora elaborar los indicadores de evaluación, a partir de las capacidades desarrolladas, atendiendo a las orientaciones dadas en el proceso de aprendizaje.

Los indicadores deben referirse a un solo aspecto de la capacidad y ser lo más representativos posible. El enunciado se redacta en forma afirmativa y en tercera persona del singular.

Proponemos a modo de ejemplo algunos, que podrían servir para evaluar las capacidades trabajadas en la unidad. Esta aclaración se aplica a las demás unidades.

- Ejemplifica sucesiones finitas.
- Identifica sucesiones infinitas entre otras dadas.
- Forma sucesiones a partir de situaciones planteadas.
- Construye sucesiones aplicando la ley de formación dada.
- Determina el término general de una sucesión utilizando el método de las diferencias finitas.
- Identifica los datos de un problema de suma de términos de una progresión aritmética.
- Verifica el resultado obtenido al aplicar la fórmula del término general de una progresión geométrica.
- Comprueba el resultado obtenido al aplicar la fórmula de suma de términos de una progresión geométrica.
- Halla los medios geométricos en una progresión geométrica.
- Utiliza la fórmula de Monto en problemas de progresión geométrica.
- Cumple las tareas asignadas.

### 2.1.7. Actividades complementarias

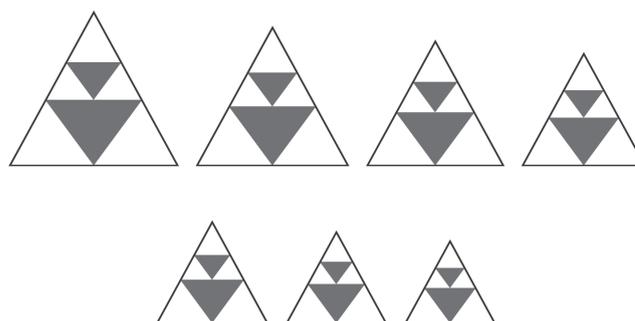
Sugerimos otras actividades además de las propuestas en el texto, que pueden ser utilizadas para retroalimentar en el momento en que el o la docente lo considere oportuno. Las mismas pueden proponerse como un trabajo de grupo. Es importante el análisis como la reflexión del problema propuesto.

#### A 1 Propuesta de actividad

**TEMA** Sucesiones. Término general.

**OBJETIVO** Determino el término general de una sucesión a través de figuras geométricas.

**DESARROLLO** Presentamos la siguiente sucesión gráfica que denominamos: «Montañitas triangulares».

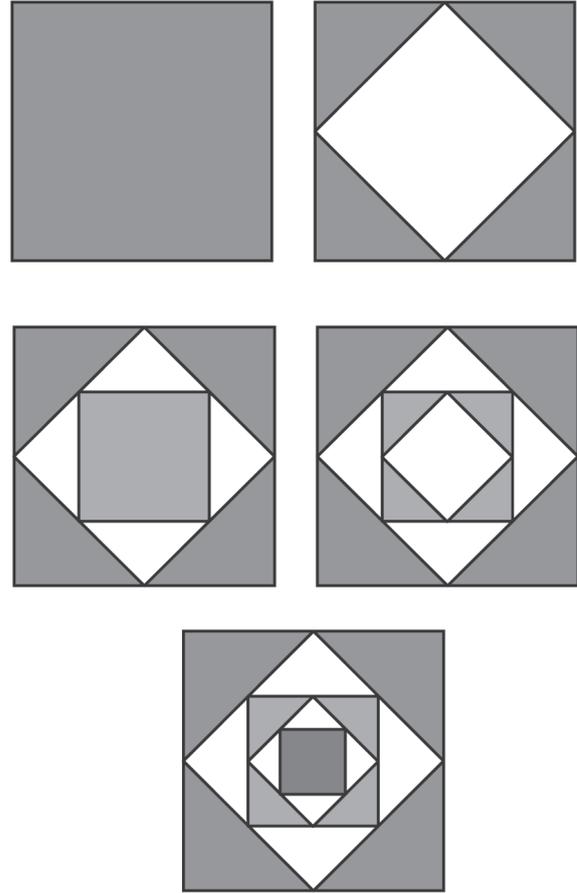


1. Observamos las sucesiones, contamos los triángulos blancos y negros formados en cada orden y completamos el cuadro siguiente:

Número de montañas			+
1	5	2	7
2	10	4	14
3	15	6	21
4	20	8	28
5	25	10	35
n	5n	2n	7n



2. Escribimos el término general de las sucesiones formadas:
  - Sucesión de triángulos blancos: 5, 10, 15, 20, ... $5n$
  - Sucesión de triángulos negros: 2, 4, 6, 8, 10, ... $2n$
  - Sucesión de la suma de triángulos blancos y negros: 7, 14, 21, 28, 35, ... $7n$
  
3. Contestamos:
  - ¿Cuántos triángulos hay en la montaña N.º 16?
  - ¿Cuántos triángulos blancos hay en la N.º 10?
  - ¿Cuántos triángulos negros hay en la N.º 8?
  
4. Concluimos diciendo que los términos generales representan los múltiplos de 2, 5 y 7.
  
5. ¿Encontramos elementos comunes entre las sucesiones de triángulos blancos y negros?  
 Reflexionamos sobre la utilidad de este proceso de solución y buscamos otras situaciones similares para hacer este tipo de razonamiento.



**A 2 Propuesta de actividad**

**TEMA** Sucesiones. Ley de formación de una sucesión.

**OBJETIVO** Identifico términos de una sucesión a través de figuras geométricas.

Determino la ley de formación de una sucesión utilizando el método de diferencias finitas.

**DESARROLLO** Planteamos la siguiente actividad: «El cuadrado y sus subdivisiones».

Dividimos sucesivamente un cuadrado tomando los puntos medios de sus lados en otros cuadrados, a partir del segundo. Luego contamos el número de cuadrados y triángulos que se forman.

1. Completamos la siguiente tabla con los datos obtenidos.

Cuadrados	Subdivisiones			+
1	0	1	0	1
2	1	2	4	6
3	2	3	8	11
4	3	4	12	16
5	4	5	16	21
$n$	$n - 1$	$n$	$4n - 4$	$5n - 4$



- 2 Determinamos el término general de:
- Las subdivisiones: 0, 1, 2, 3, 4, ...n -1
  - Los cuadrados: 1, 2, 3, 4, 5, ...n
  - Los triángulos, usando el método de las diferencias finitas:

Nº de orden	Nº de $\triangle$	
1	0	\ 4
2	4	\ 4
3	8	\ 4
4	12	\ 4
5	16	

Nº de orden	$an + b = 4n - 4$		
1	$a + b$	\ a	
2	$2a + b$	\ a	$a = 4$
3	$3a + b$	\ a	$a + b = 0$
4	$4a + b$	\ a	$4 + b = 0$
5	$5a + b$	\ a	$b = -4$

- Sucesión de triángulos: 0, 4, 8, 12, 16, ... $4n - 4$

La sucesión de la suma de cuadrados y triángulos, calculamos también por el método de diferencias finitas.

Nº de orden	$\square + \triangle$	
1	1	\ 5
2	6	\ 5
3	11	\ 5
4	16	\ 5
5	21	

Nº de orden	$an + b = 5n - 4$		
1	$a + b$	\ a	$a = 5$
2	$2a + b$	\ a	$a + b = 1$
3	$3a + b$	\ a	$5 + b = 1$
4	$4a + b$	\ a	$b = -4$
5	$5a + b$	\ a	

- Sucesión de la suma de cuadrados y triángulos: 1, 6, 11, 16, 21 ...,  $5n - 4$
- 3 Encontramos el número de cuadrados para el duodécimo orden.
  - 4 Sabiendo que tenemos 32 triángulos, ¿a qué número de orden corresponde?
  - 5 Creamos otras figuras geométricas y determinamos la ley de formación utilizando el método de diferencias finitas.
  - 6 Comentamos si resultó fácil hallar el término general por medio del método de diferencias finitas.



## 2.2

## UNIDAD 2

## Límite

**2.2.1. Capacidades**

- Determina el límite de funciones en un punto y en el infinito.
- Resuelve límites indeterminados.
- Aplica el límite en la determinación de las características de una función.

**2.2.2. Temas**

- Concepto intuitivo de límite.
- Límites laterales.
- Propiedades de los límites.
- Indeterminaciones cero sobre cero (funciones polinómicas, radicales, trigonométricas) e infinito sobre infinito.
- Continuidad.
- Discontinuidad: tipos de discontinuidad.
- Asíntotas verticales y horizontales.
- Recta tangente como límite de rectas secantes.

**2.2.3. Abordaje de los temas**

Comenzamos con la Factorización de polinomios, con el propósito de retroalimentar este tema desarrollado en años anteriores y cuyo conocimiento facilitará el estudio del «Cálculo infinitesimal».

Esta retroalimentación se podría hacer a través de un trabajo en grupo, utilizando las Actividades de fijación dadas en el texto, con el propósito de afianzar el aprendizaje, a través de la combinación de casos de factorio.

**¿Por qué es importante esta retroalimentación?**

La Factorización de polinomios estudiada en la EEB, sirve de base para el desarrollo del Cálculo Infinitesimal, de ahí la importancia de intensificar los diferentes casos de factorio al inicio de esta unidad. Para retroalimentar este tema sugerimos dedicar un tiempo prudencial, no más de un mes.

A través de ejemplos presentamos la idea intuitiva de límite, valiéndonos de figuras geométricas.

Para el cálculo del límite del término general cuando  $x \rightarrow \infty$  seguimos el siguiente procedimiento:

- Escribimos varias sucesiones numéricas.
- Determinamos el término general.
- Analizamos el comportamiento de la sucesión, por medio de la calculadora o la computadora.
- Calculamos el límite cuando  $x \rightarrow \infty$ .

Se sugiere el uso de la calculadora y la computadora para el cálculo y representación gráfica de las actividades propuestas.

Seguimos ampliando el concepto de límite, tomando como ejemplo funciones lineales y cuadráticas, construimos tablas y gráficos de las mismas e interpretamos sus comportamientos para valores próximos a un punto dado del dominio.

**La utilización de la calculadora o la computadora**

Son estrategias metodológicas que facilitan el aprendizaje del estudiante.

Es necesario que el uso de estas tecnologías de la información y la comunicación (TIC) sea planificado por el docente mediante una guía de trabajo que permita al estudiante llevar a cabo las actividades que se le proponen. Como recurso válido y pertinente se sugiere el uso de Excel u otro software para el estudio del comportamiento de las funciones. Además, tener en cuenta que muchos programas informáticos ofrecen posibilidades de acción que propician el aprendizaje significativo.



Proponemos en el texto problemas que nos acercan un poco más a la realidad relacionados con temas desarrollados en Física, Geometría y Economía como por ejemplo:

- El cálculo de la velocidad de un móvil aplicando límites.
- El cálculo de la función volumen, en la que se mantiene constante la altura y el ancho aumenta tendiendo a  $n$ .
- El cálculo del límite de la función oferta para hallar la cantidad de productos que ofertar.
- El cálculo del límite de la función demanda para hallar la cantidad de productos demandados.

### Orientaciones importantes

Las condiciones necesarias para llevar a cabo una enseñanza desde el enfoque interdisciplinario son (Hernández y Sancho, 1993):

- 1 Seguir un proceso que exige cambios en relación a la clase y al profesorado, con respecto al modelo de enseñanza-aprendizaje.
- 2 Un grupo de profesores decididos a trabajar en equipo, lo que conlleva actuaciones de planificación e intercambio continuos.
- 3 Estar dispuestos a compartir con la clase el proceso de búsqueda.

Trabajar de esta manera ayuda a organizar los temas del currículum que no solo se basan en los contenidos sino también en los métodos, de tal manera que se respete la independencia y autonomía de cada parte componente, de modo que el programa se vea integrado y funcione como un todo.

Trabajamos el tema límites indeterminados del tipo  $\frac{0}{0}$  e  $\frac{\infty}{\infty}$ ,

en funciones racionales, utilizando la factorización como un medio de salvar la indeterminación. Para calcular límites de funciones trigonométricas utilizamos el límite fundamental trigonométrico.

Una buena estrategia para el estudio de funciones continuas y discontinuas es la diseñada en el texto. En él partimos del estudio de gráficas que representan: la cotización del dólar en una semana, el costo de llamadas telefónicas, funciones lineales, cuadráticas, cúbicas y trigonométricas; analizamos las mismas y determinamos las condiciones de continuidad o discontinuidad.

En el desarrollo de algunos problemas se proponen temas transversales sobre la defensa del consumidor y del usuario, medidas de primeros auxilios, las instituciones que ofrecen cursos de electricidad, plomería, mecánica, etc.

Sugerimos indagar sobre las Genialidades Matemáticas, con el propósito de incentivar el estudio de la materia, a través de la historia de la Matemática. Las mismas podrían ser ampliadas por los estudiantes visitando algunas páginas web. Como ejemplo proponemos las siguientes:

<http://euler.ciens.ucv.ve/matematicos/euler.html>>

<http://www.biografiasyvidas.com/biografia/s/sierpinski.htm>.

### 2.2.4. Actividades complementarias

Pueden servir para retroalimentar o ampliar los temas desarrollados.



**A 1 Propuesta de actividad**

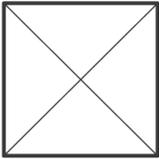
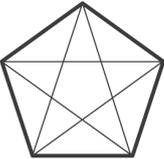
**TEMA** Límite de una sucesión.

**OBJETIVO** Determino el término general en la sucesión de diagonales de polígonos.

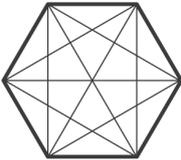
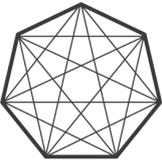
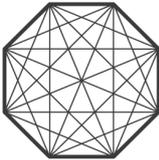
Calculo el límite del término general de la función diagonales de un polígono.

**DESARROLLO** Trabajamos con las Poli-diagonales.

1. Trazamos y contamos las diagonales de un cuadrado, pentágono, hexágono, heptágono y octógono.

N.º de orden	1	2
		
N.º de lados	4	5
N.º de diagonales	2	5

N.º de orden	3	4	5
			
N.º de lados	6	7	8
N.º de diagonales	9	14	20

**Primer paso**

- Llevamos a una tabla los resultados obtenidos en el conteo.
2. Escribimos la sucesión: 2, 5, 9, 14, 20,...
  3. Calculamos el término general de la sucesión por el método de las diferencias finitas:

N.º de orden	N.º de lados	N.º de diagonales
1	4	2
2	5	5
3	6	9
4	7	14
5	8	20

**Segundo paso**

Como hay dos diferencias la forma es cuadrática:

$$\begin{array}{l}
 an^2 + bn + c \\
 \text{Para } n = 4 \quad 16a + 4b + c \\
 \text{Para } n = 5 \quad 25a + 5b + c \\
 \text{Para } n = 6 \quad 36a + 6b + c
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \searrow \\
 \searrow \\
 \searrow
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 9a + b \\
 11a + b
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \searrow \\
 \searrow
 \end{array}
 2a$$

**Tercer paso**

Igualamos  $2a = 1$ ; (que es el N.º constante de la 2.ª diferencia).

$$a = \frac{1}{2}$$

Tomamos  $9a + b = 3$ ; (que es el primer término de la 1.ª diferencia).

$$9 \cdot \frac{1}{2} + b = 3 \quad b = -\frac{3}{2}$$

Estos valores de a y b llevamos al primer trinomio, e igualamos a 2 que es el número de diagonales del primer polígono:

$$16a + 4b + c = 2$$

$$16 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + c = 2 \rightarrow c = 0$$

**Cuarto paso**

Reemplazamos a, b y c por sus valores en:  $an^2 + bn + c$ :

$$\frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n = \frac{(n^2 - 3n)}{2} = n \cdot \frac{(n-3)}{2} \quad (\text{que es el término general de la sucesión de diagonales de los polígonos de } n \text{ lados } > 3).$$

4. Escribimos la función diagonal y determinamos el límite para:

$$n = 10, 12 \text{ y } 14$$

$$f(d) = \frac{n(n-3)}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow 10} \frac{n(n-3)}{2} = \frac{(10 \cdot 7)}{2} = 35 \text{ diagonales}$$

$$\lim_{n \rightarrow 12} \frac{n(n-3)}{2} = \frac{(12 \cdot 9)}{2} = 54 \text{ diagonales}$$

$$\lim_{n \rightarrow 14} \frac{n(n-3)}{2} = \frac{(14 \cdot 11)}{2} = 77 \text{ diagonales}$$

Concluimos que a medida que aumenta el número de lados del polígono también aumenta el número de sus diagonales.



**A 2 Propuesta de actividad**

**TEMA** Límite de sucesiones.

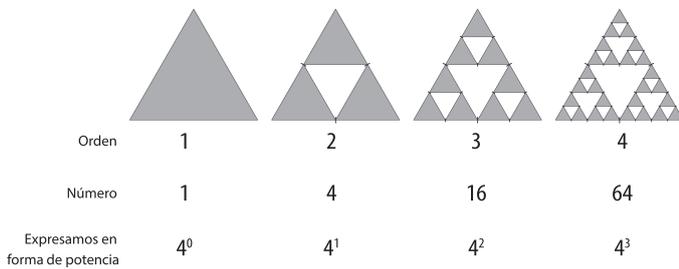
**OBJETIVO** Determino el término general en la sucesión del triángulo de Sierpinski.

**DESARROLLO** Trabajamos con el triángulo de Sierpinski.

- 1 Construimos las sucesiones de triángulos hasta  $n = 4$  (4 iteraciones).
  - a. Considerar inicialmente un triángulo equilátero.
  - b. Marcar los segmentos de los puntos medios de los lados formando 4 triángulos equiláteros.
  - c. Dejar en blanco el triángulo central y subdividir los otros de la misma manera que se hizo en b.
  - d. Repetir en cada uno de los triángulos pintados los pasos b y c.

**Glosario**

Iteraciones: repeticiones.



2. Resumimos en la siguiente tabla el número de triángulos.

Nº de orden	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N.º $\triangle (4^n)$	1	4	16	64	...	...	...	...	...	...

Luego el término general es  $4^n$ .

Llevando al límite cuando  $n \rightarrow \infty$

el término general de la sucesión:  $\lim_{n \rightarrow \infty} 4^n = 4^\infty = \infty$

Concluimos que la sucesión es creciente tendiendo al infinito.

Analizamos los procedimientos seguidos para llegar a la conclusión.



## UNIDAD 3

## 2.3

## Derivadas

**2.3.1. Capacidades**

- Formula y resuelve situaciones problemáticas en las que se aplique el concepto de derivada.
- Determina la derivada de distintos órdenes de funciones algebraicas, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.
- Interpreta las características de una función, usando derivadas
- Formula y resuelve problemas de optimización empleando derivadas.

**2.3.2. Temas**

- Derivada como pendiente de la recta tangente en un punto.
- Derivada como límite del cociente incremental.
- Reglas prácticas de derivación.
- Regla de la cadena.
- Derivadas sucesivas.
- Regla de L'Hopital.
- Rectas tangente y normal en un punto.
- Criterios de la primera y la segunda derivada.
- Puntos críticos (máximo y mínimo).
- Puntos de inflexión.
- Concavidad y convexidad.
- Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
- Asíntotas.
- Representación gráfica de la derivada de una función.

**2.3.3. Evaluación diagnóstica**

Encuentro las estrategias para resolver

1. Verifico el siguiente límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^5 + 3x^4 + 3}{x^4 - 2x^3 + x} = \infty$$

2. Calculo el siguiente límite:

$$\lim_{n \rightarrow 3} \left( \frac{1}{x-3} - \frac{9}{x^2-9} \right)$$

Respuesta:  $\frac{1}{6}$

**2.3.4. Página de apertura**

Como actividad inicial proponemos la lectura y un breve comentario sobre «La Notación actual de la derivada». Aprovechando la información se podría pedir a los alumnos y las alumnas que investiguen en Internet u otros medios sobre los demás aportes de Isaac Newton, Gottfried Leibniz y Leonardo Euler.

Se puede visitar las páginas web:

[http:// es.wikipedia.org/wiki/Isaac Newton](http://es.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton)

[http:// www.divulgamat.net/weborriak/Histori/MateOs-petsuak/Leibniz.asp](http://www.divulgamat.net/weborriak/Histori/MateOs-petsuak/Leibniz.asp)

[http:// euler.ciens.usv.ee/matemáticos/euler.html](http://euler.ciens.usv.ee/matemáticos/euler.html)

**2.3.5. Abordaje de los temas**

Esta unidad podemos presentar analizando con los estudiantes que todo fenómeno en la naturaleza y en la sociedad está sujeto a cambios. Como ejemplos podemos nombrar: la población de un país varía con los años, las temperaturas también varían en el transcurso del tiempo, etc.

El estudio de estas variaciones nos llevará a construir uno de los conceptos más importantes del Cálculo: la derivada.

La derivada como tasa de variación o razón de cambio, nos plantea el texto a través de un ejemplo de la variación de la velocidad, o razón de cambio del desplazamiento con respecto al tiempo.

Para ello partimos del concepto de velocidad media:

$$V = \frac{\text{variación de espacio}}{\text{variación de tiempo}} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Calculamos la misma en varios intervalos de tiempo, graficamos la función, analizamos su comportamiento y concluimos con la definición de T.V.M.

Luego aplicamos la T.V.M. en funciones cúbicas, lineales y cuadráticas, graficamos las mismas y analizamos cada una de ellas.



El concepto de derivada de una función en un punto se presenta con los estudios de una función lineal y otra cuadrática. En ellas se observa, para la función lineal el cociente incremental  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$ , es decir, es constante cualquiera sea el valor de  $x$ ; no así la función cuadrática  $f(x) = x^2$ , donde a partir de un valor  $x_0$  es  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$ .

Si damos a  $x_0$  el valor 1 y a  $\Delta x$  valores cada vez más pequeños, vemos que el cociente incremental tiende a 2. De aquí se concluye que: «el límite del cociente incremental cuando  $\Delta x$  tiende a cero, es la derivada de una función».

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Consideramos conveniente que el estudiante grafique la función dada y su función derivada, con el propósito de que comprenda que la derivada de una función es otra función.

Las reglas prácticas de derivación o Álgebra de las derivadas; la derivada de una función compuesta, de funciones inversas y derivadas sucesivas son explicadas con ejemplos resueltos, aclarando el procedimiento seguido, de modo que el estudiante pueda llegar a la solución correcta de todas las actividades propuestas.

Es importante que los alumnos y las alumnas apliquen el concepto de derivada en la Física. El texto presenta la interpretación física de la derivada.

En esta unidad podemos trabajar como tema transversal la educación democrática, se muestra una señal de tránsito que indica la pendiente de una carretera. Proponemos conversar sobre el respeto de las señales de tránsito realizando estas preguntas entre otras:

1. ¿Para qué sirven las señales de tránsito?
2. Cita las señales de tránsito que conoces. ¿Qué indica cada una de ellas?
3. ¿Cuáles son las instituciones encargadas de la señalización de las calles y rutas?
4. ¿Qué acciones podemos realizar para concienciar el cumplimiento de las leyes de señalización?

Las actividades de retroalimentación se pueden realizar en grupos utilizando la estrategia del aprendizaje cooperativo.

### El aprendizaje cooperativo

El aprendizaje cooperativo es una técnica válida que favorece la interacción entre los y las estudiantes. Exige por parte de los mismos, la aceptación de la diversidad como fuente de construcción y aprendizaje. Enriquece el trabajo con una participación real de todos los involucrados, desarrolla la capacidad de negociación y el respeto por las diferencias. No se trata de una simple suma de aportes, sino de una constante retroalimentación que va rescatando los conocimientos, la experiencia, el bagaje cultural que posee cada sujeto. Facilita la confrontación de puntos de vista, argumentaciones, tomar decisiones conjuntas y ofrecer posibles soluciones para los conflictos que se presenten.

#### 2.3.6. Algunos indicadores de evaluación

- Calcula la derivada de una función  $f(x)$  en intervalos señalados.
- Calcula la derivada de una función  $f(x)$  en intervalos señalados.
- Elabora conclusiones sobre tasa de variación media a partir de gráficos.
- Utiliza la regla práctica de derivación de una suma (o diferencia) de funciones.
- Utiliza la regla práctica de derivación de un producto (o cociente) de funciones.
- Aplica la derivada en la determinación de la pendiente de la recta tangente a la función en un punto dado.
- Halla la derivada de la función trigonométrica indicada.
- Determina la tercera derivada de una función dada.
- Asume con responsabilidad el trabajo realizado.

#### 2.3.7. Actividades complementarias

Para este apartado sugerimos algunas actividades, que pueden ser propuestas para un trabajo grupal. Dos de ellas pueden ser desarrolladas en la sala de computación.

### A 1 Propuesta de actividad

**TEMA** Tasa de variación media.

**OBJETIVO** Interpretar la razón media de cambio de una función en un intervalo dado.

**DESARROLLO** Planteamos las siguientes situaciones problemáticas:



- Las gráficas representan la variación del espacio recorrido respecto al tiempo, de dos partículas que se mueven de manera diferente, sabiendo que el espacio se mide en metros y el tiempo en segundos.

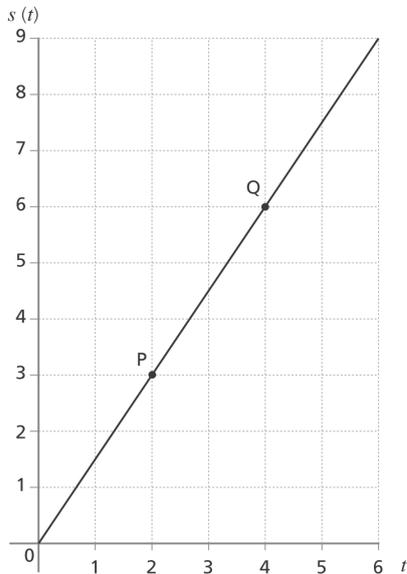


Gráfico 1

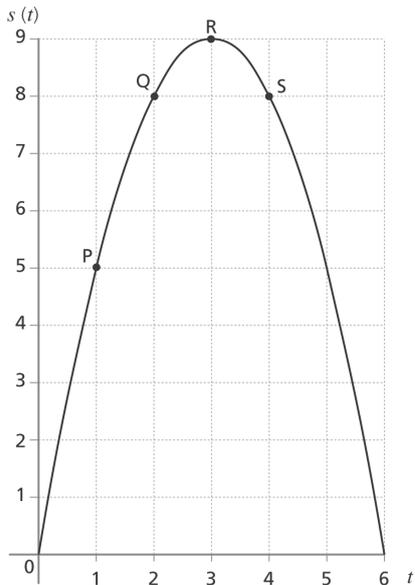


Gráfico 2

- ¿Cuál es la velocidad media de la partícula de la gráfica 1, cuando se mueve de la posición P a la posición Q?
- ¿Cuánto mide el ángulo de inclinación de la recta?
- ¿Cuál es la velocidad media de la partícula de la gráfica 2, cuando se mueve de la posición P a la posición Q, de Q a R y de R a S?

**Solucionamos**

Primero, consideramos la gráfica 1.

Las coordenadas de los puntos P y Q son:

$$P(2, 3) \text{ y } Q(4, 6)$$

$$V_m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(6 - 3)}{(4 - 2)} = \frac{3}{2} = 1,5 \frac{m}{s} \text{ velocidad media}$$

La velocidad media de la partícula entre P y Q es 1,5 m/s.

Sabiendo que la tangente del ángulo de inclinación coincide con la pendiente de la recta porque la velocidad media de la partícula es la variación de la velocidad entre los puntos P y Q:

$$\text{tg} \alpha = m \rightarrow \text{tg} \alpha = 1,5 \rightarrow \alpha = 56^\circ 18' 36''$$

Segundo, consideramos la gráfica 2.

Obtenemos la velocidad media de la partícula:

de P a Q:  $P(1, 5) \text{ y } Q(2, 8)$

$$V_m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(8 - 5)}{(2 - 1)} = \frac{3 \text{ m}}{s} \rightarrow \text{La función es creciente en este intervalo porque la } V_m > 0.$$

De Q a R:  $Q(2, 8) \text{ y } R(3, 9)$

$$V_m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(9 - 8)}{(3 - 2)} = \frac{1 \text{ m}}{s} \rightarrow \text{La función es creciente en este intervalo porque la } V_m > 0.$$

De R a S:  $R(3, 9) \text{ y } S(4, 8)$

$$V_m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(8 - 9)}{(4 - 3)} = -\frac{1 \text{ m}}{s} \rightarrow \text{La función es decreciente porque la } V_m < 0.$$

Concluimos que la función crece y decrece según los intervalos que se consideran.

**EN LA SALA DE INFORMÁTICA**

**A 2 Propuesta de actividad**

- TEMA** Tasa de variación media.
- OBJETIVO** Utilizo el concepto de derivada de funciones en el análisis y resolución de problemas. Realizo actividades que favorezcan el desarrollo del pensamiento crítico y reflexivo.
- MATERIAL** Un software que permita graficar.
- DURACIÓN** 80 minutos



### ACTIVIDAD 1

#### Relacionamos con ciencias

En la tabla de abajo se registra el resultado obtenido en un laboratorio de ciencias sobre el crecimiento de una plántula de poroto (los valores consignados son aproximados):

t (horas)	0	1	2	3	4	5
S(t) (cm)	2	3	4	5	6	7

- Con la información dada en la tabla:
  - a. Determino la función que relaciona el crecimiento con el tiempo transcurrido y la relación existente entre las dos variables. Luego grafico.
  - b. ¿Hay algún intervalo de tiempo en el cual el crecimiento sea más rápido?
  - c. Calculo la velocidad media de crecimiento en los intervalos [2, 1] y [4, 5].
  - d. ¿Cuál es la tasa de variación instantánea del crecimiento, en cualquier instante?
  - e. ¿Qué relación existe entre la variación instantánea de crecimiento en cualquier instante t y la velocidad media en cualquier intervalo?

#### DESARROLLO

- a. De la tabla extraemos los puntos  $P_1(1, 3)$  y  $P_2(2, 4)$  y calculamos la ecuación de la recta que pasa por esos puntos.

- Hallamos primero la pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 3}{2 - 1} = 1$$

- Escribimos la ecuación punto-pendiente:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 3 = 1(x - 1) \longrightarrow y = x + 2$$

$$\boxed{S(t) = t + 2}$$

Es la función del crecimiento en relación al tiempo.

- La variable dependiente es S(t) y la variable independiente es t.

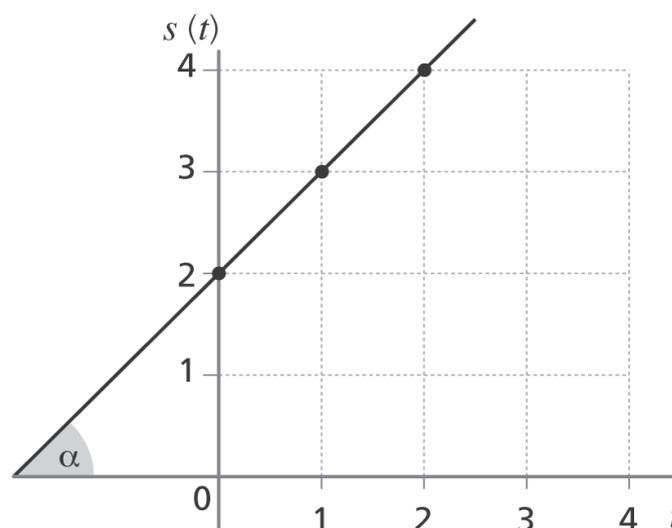
Para graficar la función encontrada, en la computadora seguimos estos pasos:

1. Copiamos la tabla dada al inicio de la actividad en una hoja de cálculo.

	A	B
1	X (t horas)	Y(S(t))
2	0	2
3	1	3
4	2	4
5	3	5
6	4	6
7	5	7

2. Seleccionamos la tabla anterior e insertamos un gráfico de dispersión con puntos de datos conectados por líneas para la misma:

- Hacemos clic en Insertar en la barra de menú y en gráfico.
- Seleccionamos el tipo y subtipo de gráfico (dispersión - con puntos de datos conectados por líneas).
- Finalizamos.





b. Observando la tabla podemos deducir que el crecimiento es de 1 cm cada hora y éste se mantiene constante.

$$c. v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1} = \frac{4 - 3}{2 - 1} = \frac{1}{1} = 1 \text{ m/s en el } [1, 2]$$

$$v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{7 - 6}{5 - 4} = \frac{1}{1} = 1 \text{ m/s en el } [4, 5]$$

d. Para hallar la tasa de variación instantánea de crecimiento en cualquier instante, aplicamos el concepto de derivada:

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

como  $y = f(x) = x + 2$ ,  $y' = 1$  Tasa de variación instantánea.

Con la siguiente demostración nos damos cuenta de que cualquiera sea el punto que tomamos de la recta, la tasa de variación instantánea va creciendo.

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} (x + 2) = 2$$

$$\lim_{h \rightarrow 3} (x + 2) = 3 + 2 = 5$$

**Concluimos:** La velocidad instantánea es positiva por lo tanto existe crecimiento de la función.

e. La tasa de variación instantánea de crecimiento en cualquier instante  $t$  es igual a la velocidad media en ese instante.

$$TVM = \frac{\Delta S}{\Delta t} = 1 \quad TVI \quad y' = 1$$

### ACTIVIDAD 2

#### Relacionamos con Física

La siguiente actividad para trabajar con la computadora presenta un cúmulo muy importante de conceptos y procesos, por ello entendemos que no es un problema para comenzar la unidad sino más bien para utilizar al término de la misma y así evaluar cuánto se ha logrado.

- Un cuerpo que es lanzado hacia arriba se mueve de modo que su posición después de  $t$  segundos está dada por la ley o función  $S(t) = -2t^2 + 12t + 9$  metros.
  - a. Represento gráficamente en la computadora.
  - b. Determino la tasa de variación media de cambio del espacio recorrido con respecto al tiempo transcurrido durante los primeros 5 segundos, en intervalos de 1 segundo de amplitud.

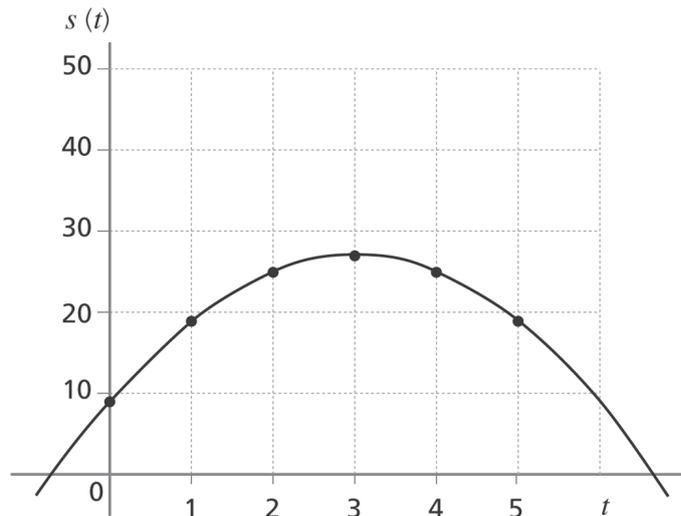
- c. ¿Cuál es la razón de cambio de desplazamiento a los 2 segundos de iniciado el movimiento?
- d. ¿Qué nos indica la función derivada en un punto?

### DESARROLLO

- a. Para graficar la función encontrada en la computadora seguimos estos pasos:
  1. Construimos y copiamos la siguiente tabla en una hoja de cálculo.

	A	B
1	X (t horas)	Y(S(t))
2	0	9
3	1	19
4	2	25
5	3	37
6	4	25
7	5	19
8	6	9

2. Seleccionamos la tabla anterior e insertamos un gráfico de dispersión de la siguiente manera:
  - Hacemos clic en Insertar en la barra de menú y en gráfico.
  - Seleccionamos el tipo y subtipo de gráfico (dispersión - con líneas suavizadas y sin marcadores de datos).
  - Finalizamos.





- b. Hallamos la T.V.M. en los intervalos: [1, 2] [2, 3] [3, 4] [4, 5].

$$\text{TVM } [1, 2] = \frac{25 - 19}{2 - 1} = \frac{6}{1} = 6 > 0$$

Es positiva, la función es creciente.

$$\text{TVM } [2, 3] = \frac{27 - 25}{4 - 3} = \frac{2}{1} = 2 > 0$$

Es positiva, la función es creciente.

$$\text{TVM } [3, 4] = \frac{25 - 27}{4 - 3} = \frac{-2}{1} = -2 < 0$$

Es positiva, la función es decreciente.

$$\text{TVM } [4, 5] = \frac{19 - 19}{5 - 4} = \frac{-6}{1} = -6 < 0$$

Es positiva, la función es decreciente.

- c. A los 2 segundos de iniciado el movimiento, la razón de cambio es 2; la función crece hasta llegar al punto máximo (3, 27).

d. Su función primitiva es:  $S(t) = -2t^2 + 12t + 9$

La función derivada es:  $S'(t) = -4t + 12$

Si el tiempo  $t = 3$  segundos reemplazamos en

$$S'(t) = -4 \cdot 3 + 12 = -12 + 12 = 0;$$

la pendiente es cero y la recta tangente es paralela a la recta  $y = 0$  (eje x).

Por tanto podemos decir que la derivada de una función en un punto  $x_0$ , representa la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto.

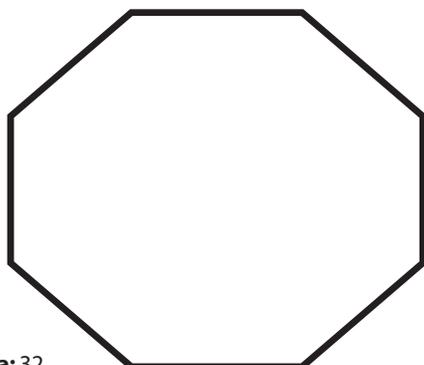
Graficamos también utilizando la computadora.

3. Aplico la regla correspondiente para derivar la siguiente función:

$$f(x) = \frac{e^x + 1}{x}$$

**Respuesta:**  $y = \frac{xe^x x - e^x - 1}{x^2 x}$

4. ¿Qué lío es! Cuento el número de intersecciones de las diagonales de un octógono regular.



**Respuesta:** 32

### 2.3.8. Sugerencias didácticas

#### 2.3.8.1. Proceso de desarrollo de capacidades

Comprende el enunciado del problema referido a maximización o minimización de funciones en diversos contextos.

1. Leer el enunciado del problema.
2. Extraer los datos del problema.
3. Identificar la incógnita.
4. Reconocer si la condición es suficiente para determinar la incógnita.
5. Estimar el resultado.
6. Aceptar opiniones del grupo al analizar el enunciado de un problema para tomar decisiones.

#### 2.3.8.2. Página de apertura

Basándonos en los conocimientos previos de los alumnos y las alumnas proponemos un resumen sobre las funciones cuadráticas, cúbicas y cuárticas a través de la representación de las mismas. Identificamos los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los puntos máximos y mínimos, la concavidad y convexidad que presentan.

#### 2.3.8.3. Abordaje de los temas

A través de ejemplos resueltos presentamos la regla de L'Hôpital para el cálculo de límites de funciones racionales indeterminadas  $\frac{0}{0}$  e  $\frac{\infty}{\infty}$ .

Trabajamos el análisis de funciones a través de ejemplos utilizando recursos gráficos y derivando determinamos los puntos máximos, mínimos y de inflexión primero con funciones cuadráticas, luego con funciones cúbicas y cuárticas, y por último con funciones trigonométricas.

En los ejemplos resueltos se puede visualizar la metacognición mediante preguntas formuladas en la última etapa de resolución como:

¿Podimos aplicar las reglas estudiadas sin dificultad?

¿Consideramos que el resultado obtenido se ajusta al pedido del problema? ¿Por qué?

¿Consideramos lógica la solución obtenida? ¿Por qué?

**Orientaciones importantes**

Para que el estudiante incorpore y use eficientemente la metacognición, es importante observarlo y retroalimentarlo durante el proceso de resolver problemas.

La discusión entre grupos pequeños de estudiantes al resolver problemas puede ayudar al desarrollo de la competencia.

Schoenfeld recomienda que el docente monitoree el trabajo de cada uno de los grupos y los haga reflexionar con preguntas tales como: ¿Qué están haciendo? ¿Por qué lo están haciendo? ¿Qué harán con los resultados cuando los obtengan?

Además es importante que los integrantes del grupo respeten las ideas de cada participante y que al final, ellos mismos realicen la metacognición, es decir:

- describan el proceso seguido,
- fundamenten cada paso y
- reflexionen.

Algunas preguntas que servirán para la metacognición son:

- ¿Cómo llegué al resultado?
- ¿Cómo sé que la solución que obtuve es correcta?
- ¿Puedo encontrar otra forma o método para resolver este problema?
- ¿Qué aspecto no me quedó bien claro?
- ¿Qué estrategia utilicé para resolver el problema?
- ¿En qué me puede ayudar la solución de este problema?
- ¿Cuál es el camino más viable?

Una de las expectativas de logro de la Educación Media es que el estudiante aplique el concepto de derivada de funciones en la resolución de problemas en otras disciplinas como Física, Geometría y Economía. Respondiendo a esta expectativa, el texto presenta bajo el título de Problemas de optimización, varias propuestas que involucran expresiones algebraicas, en el cálculo de área y volumen de cuerpos geométricos, el cálculo de altura máxima y el alcance máximo de un proyectil, el cálculo del ingreso total máximo, el máximo beneficio y el costo promedio mínimo.

Este tema es propicio para un trabajo interdisciplinario con el docente de Física, porque permitirá la aplicación de la derivada como otro procedimiento para el cálculo del lanzamiento oblicuo y desplazamiento horizontal de un móvil u otros.

**2.3.8.4. Algunos indicadores de evaluación**

- Aplica la regla de L'Hôpital en funciones racionales.
- Determina el punto crítico, el valor máximo y el valor mínimo de una función  $f(x)$ .
- Halla el punto de inflexión de una función en un intervalo dado.

**A 3 Propuesta de actividad**

**TEMA** Problemas de optimización.

**OBJETIVO** Resuelvo problemas que requieran maximizar o minimizar una función.

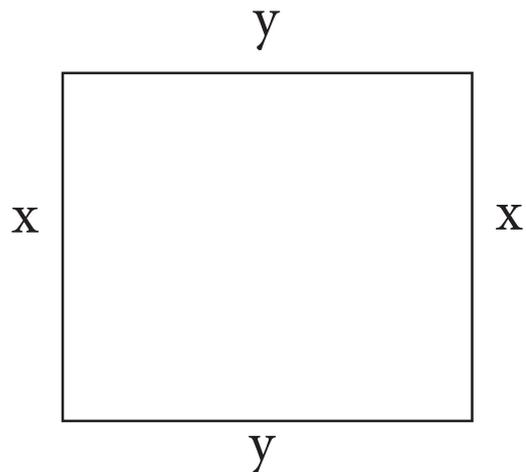
**DESARROLLO** Presentamos la siguiente situación problemática:

Se desea cercar un patio rectangular de  $168 \text{ m}^2$ . El tejido de alambre se vende a 3 reales el metro, pero uno de los lados deber ir reforzado con alambre especial de 4 reales el metro. Calcular las dimensiones del patio y el costo mínimo para cercarlo.

**SOLUCIONAMOS**

Las variables son: longitud del lado reforzado y su opuesto.

y longitud de cada uno de los lados contiguos



Determinamos la función por optimizar:

En nuestro ejemplo es el costo en reales:

$$C = 4x + 3x + 3y + 3y$$

$$C(x) = 7x + 6y$$

Expresamos la función anterior en una sola variable, para poder derivar.



Para ello consideramos el área:

$$A = x \cdot y = 168 \text{ m}^2$$

$$y = \frac{168}{x}$$

sustituyendo este valor en  $C(x)$  tenemos:

$$C(x) = 7x + 6 \cdot \frac{168}{x} = 7x + \frac{1008}{x}$$

Derivamos esta función para hallar posibles máximos y mínimos:

$$C'(x) = 7 - \frac{1008}{x^2}$$

Igualamos a cero.

$$C'(x) = 0$$

$$7 - \frac{1008}{x^2} = 0$$

$$7x^2 - 1008 = 0 \quad x^2 = 144$$

$$x = +12 \quad y = 14 \quad P(12, 14) \text{ es un punto crítico.}$$

$$x = -12 \quad y = -14$$

Las dimensiones del patio son 12 m y 14 m respectivamente. Calculamos la segunda derivada y reemplazamos  $x$  por su igual 12.

$$C''(x) = \frac{2016}{x^3} = \frac{2016}{12^3} = 168 > 0 \text{ luego el costo es mínimo.}$$

$$C(x) = 7x + 6y = 7 \cdot 12 + 6 \cdot 14 = 168 \text{ reales}$$

El costo mínimo para cercar el patio es: 168 reales.

#### A 4 Propuesta de actividad

**TEMA** Derivada de una función cúbica o polinómica.

**OBJETIVO** Determino el valor máximo y mínimo de la función cúbica.

**DESARROLLO** Planteamos la siguiente situación problemática:

Dada la función  $T(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x - 6$ , calculamos la temperatura, expresada en grados centígrados, de una sustancia en función del tiempo, expresado en segundos.

1. ¿En qué momento la temperatura alcanza un máximo o un mínimo?
2. Graficamos aproximadamente la función.
3. ¿En qué intervalos de tiempo aumenta la temperatura y cuándo disminuye?

1. Solucionamos

$$T(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x - 6$$

$$T'(x) = 6x^2 - 42x + 60$$

$$T'(x) = 0$$

$$6x^2 - 42x + 60 = 0 \quad :6$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$(x - 5)(x - 2) = 0$$

$$x_1 = 5$$

$$T_1 = 2 \cdot 5^3 - 21 \cdot 5^2 + 60 \cdot 5 - 6 = 19^\circ$$

$$x_2 = 2$$

$$T_2 = 2 \cdot 2^3 - 21 \cdot 2^2 + 60 \cdot 2 - 6 = 46^\circ$$

$$P_1(5, 19)$$

$$P_2(2, 46)$$

$$T''(x) = 12x - 42$$

Para  $x = 5$

$$T''(5) = 12 \cdot 5 - 42 = 18 > 0$$

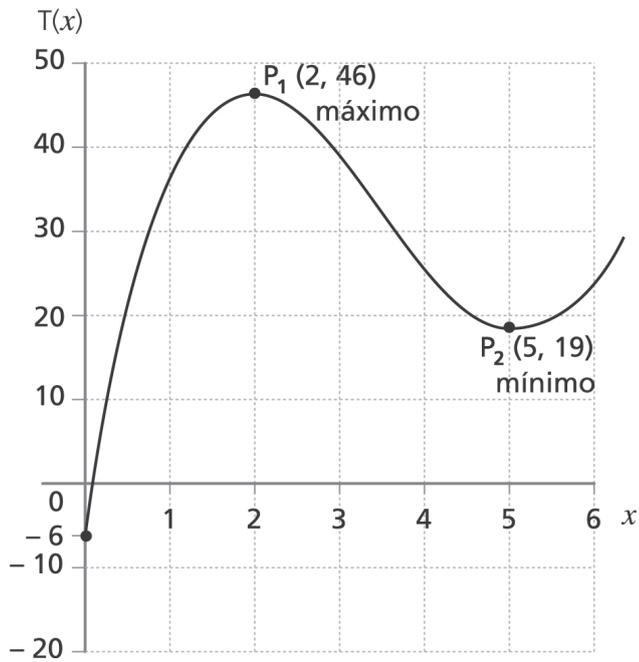
Mínimo

$$T''(2) = 12 \cdot 2 - 42 = -18 < 0$$

Máximo



2. Graficamos aproximadamente la función.



La temperatura máxima alcanza en  $P_1(2, 46)$  y la mínima en el punto  $P_2(5, 19)$ .

3. La temperatura crece en los intervalos:  $[0, 2]$ ,  $[5, \infty]$  y decrece en el intervalo:  $[2, 5]$ .

- Concluimos que para conocer los puntos máximos y mínimos, llevamos los puntos críticos a la segunda derivada. Si nos da un valor positivo mayor que cero la temperatura es mínima, y si el valor es menor que cero la temperatura alcanza su valor máximo.

# 3

## **Estrategias de aprendizaje** «Matemática 3»



### 3 Estrategias de aprendizaje

Inicialmente es importante considerar la implicancia de los términos ESTRATEGIA y APRENDIZAJE, a fin de precisar una definición del tema a tratar en este apartado.

El término estrategia puede emplearse en distintos ámbitos como sinónimo de un proceso basado en una serie de premisas que buscan obtener un resultado específico, por lo general beneficioso. La misma constituye los principios y las rutas fundamentales que orientarán el proceso para alcanzar los objetivos a los que se desea llegar. En el contexto pedagógico, la estrategia, es una puesta en práctica de la inteligencia y el raciocinio por medio de la implementación de una serie de técnicas para el desarrollo de la enseñanza.

El aprendizaje es la adquisición de nuevas conductas de un ser vivo a partir de experiencias previas, con el fin de conseguir una mejor adaptación al medio físico y social en el que se desenvuelve. Es el proceso a través del cual se adquieren o modifican habilidades, destrezas, conocimientos, conductas o valores como resultado del estudio, la experiencia, la instrucción, el razonamiento y la observación. El aprendizaje se define como el cambio de la conducta de una persona a partir de una experiencia, es la consecuencia de aprender a aprender.

Las estrategias de aprendizaje son el modo en que enseñamos a nuestros estudiantes, es decir, la forma de aprovechar al máximo sus posibilidades de una manera

constructiva y eficiente. Está demostrado que las mismas juegan un papel muy importante en todo el proceso de enseñanza aprendizaje.

Podemos afirmar que las estrategias de aprendizaje constituyen el proceso mediante el cual se interiorizan mejor los conocimientos, son guías de las acciones a seguir que ayudan a tomar una decisión consciente sobre el procedimiento que hay que utilizar, a fin de lograr el objetivo de aprendizaje.

Se puede definir a la estrategia de aprendizaje como el proceso por el cual el docente o el estudiante elige, observa, piensa y aplica los procedimientos adecuados para conseguir un fin. "Son procedimientos flexibles que pueden incluir técnicas... Su aplicación es intencionada, consciente y controlada... requiere la aplicación de conocimientos metacognitivos, de lo contrario se confundirá con las técnicas" (Díaz Barriga Areco. p.179).

Como docentes debemos aprovechar al máximo no solo las posibilidades del estudiante sino también las nuestras. En estos últimos años han ido surgiendo diferentes formas de aprender y de enseñar, es decir diferentes estrategias, es importante conocerlas y ponerlas en práctica. Procedimientos de las estrategias de aprendizaje.

Durante el proceso de aprendizaje es esencial ver lo que realiza el estudiante, su progreso se debe considerar no sólo por los resultados sino como lo está consiguiendo,

o sea el "durante". Cuando un estudiante emplea una estrategia es capaz de ajustar su comportamiento a una actividad y así lograr el objetivo. Para que la actividad de un estudiante sea considerada como estrategia el mismo debe seguir básicamente los siguientes pasos:

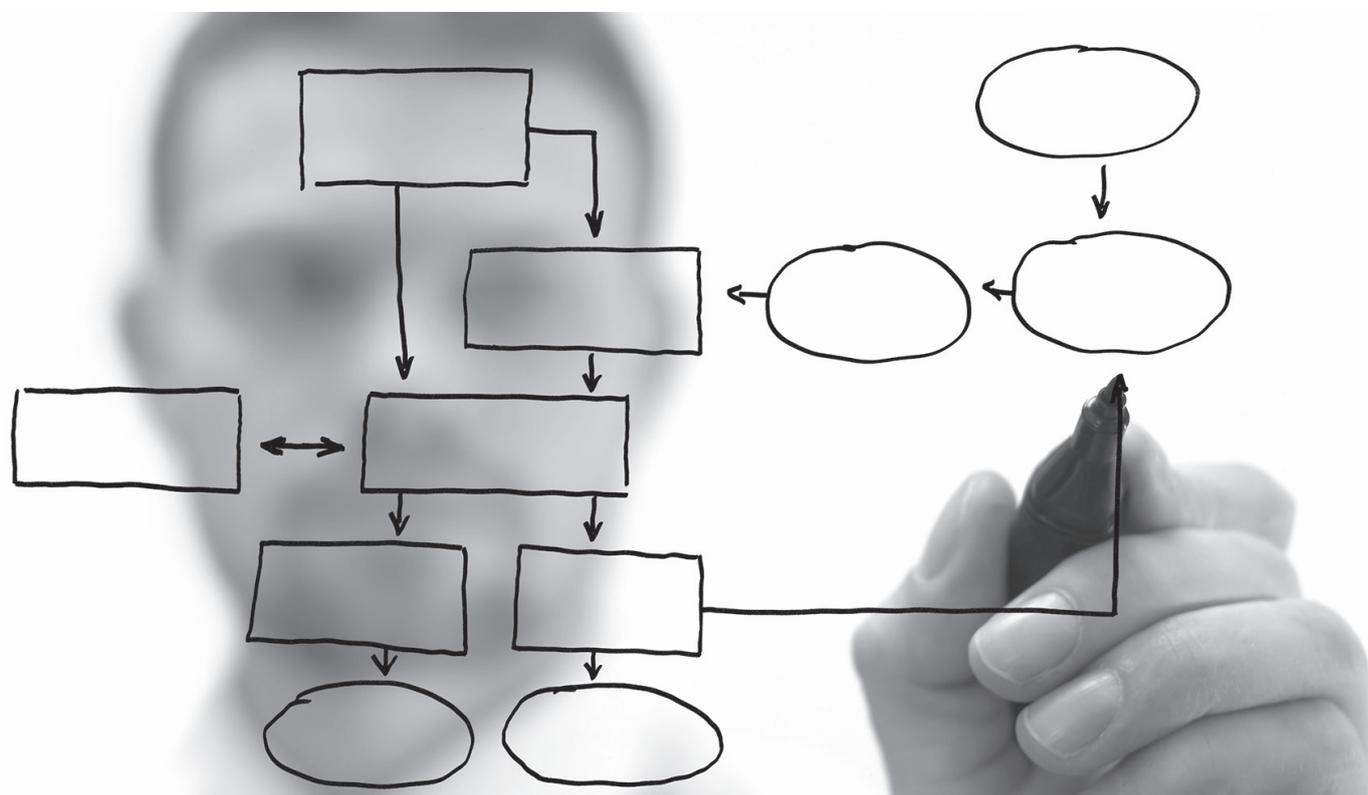
- Realizar una reflexión sobre la tarea.
- Planificar para saber lo que va a hacer (el estudiante debe de tener una serie de recursos previos).
- Ser capaz de realizarla.
- Evaluar su actuación.

Las estrategias de aprendizaje deberán ser evaluadas lógicamente por el profesor, el cual valorará la autonomía que tiene el alumno de realizar las tareas en la clase como las de extra clase.





### 3.1 Técnicas de aprendizaje



Las estrategias de aprendizaje son las responsables de guiar, de ayudar, de establecer el modo de aprender. En cambio, las técnicas de estudio son las herramientas encargadas de realizar las estrategias mediante procedimientos concretos para cada una. Estas deben aplicarse y ajustarse al objetivo planteado, al contenido y a las características de los estudiantes.

La diferencia tanto de la técnica como de la estrategia es muy sencilla, por ejemplo, si pensamos en un equipo de fútbol podemos ver a un equipo con buen manejo de la pelota, he ahí la técnica, pero este equipo también necesita una estrategia de juego o jugadas, es decir las posiciones y movimientos de los jugadores en defensa y ataque, generalmente definidas por el entrenador y que se deben aplicar durante el juego. Si un jugador dejara de jugar y de entrenar por mucha estrategia y calidad que tenga, acabaría siendo un mal jugador. La técnica sin la estrategia no funciona, pero tampoco podemos crear una estrategia efectiva si no se cuenta con el dominio de la técnica.

En el proceso de enseñanza aprendizaje las técnicas son las actividades que realizan los estudiantes cuando apren-

den: repetir, subrayar, esquematizar, realizar preguntas, etc. Cuanto el estudiante más se conozca a sí mismo y conozca las distintas técnicas de estudio que tiene a su disposición, más fácil le será seleccionar las adecuadas a cada situación para crear sus propias estrategias y construir su aprendizaje.

Aprender a estudiar sacándole provecho a las capacidades personales es muy parecido a un entrenamiento físico: hace falta voluntad, un buen entrenador y constancia. Si no se conoce la manera de hacerlo es difícil tener buenos resultados, hay que querer, pero también saber. Los pasos a seguir son casi siempre los mismos a la hora de estudiar, lo que varía es la elección de la técnica en cada uno de estos pasos. El objetivo final será que el estudiante sepa autorregularse y ser autónomo en su aprendizaje.

Ante todo lo expuesto, vemos que las técnicas didácticas ocupan un lugar fundamental en el proceso de enseñanza aprendizaje, son las actividades que el docente planea y ejecuta para facilitar la construcción del conocimiento de sus estudiantes.

Posteriormente, estaremos explicitando algunas técnicas innovadoras que facilitan el aprendizaje de los estudiantes.



## 3.2 Clasificación y finalidad de las estrategias de aprendizaje

### Clasificación de las estrategias de acuerdo con su función cognitiva

Entre las estrategias que cumplen funciones cognitivas se encuentran: las de Adquisición de información, que incluyen la observación, la búsqueda de información con manejo de fuentes, selección de información, el repaso y retención. La de Interpretación entre las que se encuentra la decodificación o traducción, la aplicación de modelos para interpretar situaciones, el uso de analogías y metáforas. Las de análisis y razonamiento; que aborda obviamente el análisis y comparación de modelos, el razonamiento y la realización de inferencias, la investigación y solución de problemas. Las de comprensión y organización que incluyen la comprensión del discurso oral y escrito, el establecimiento de relaciones conceptuales y la organización conceptual. Las estrategias de comunicación que desarrollan la expresión oral y escrita, al igual que la expresión a través de la información gráfica, numérica, icónica entre otros. (Pozo, citado en Díaz Barriga Areco).

### Otras estrategias y sus finalidades

Además de las anteriormente técnicas de aprendizaje mencionadas, existen otras que no son de menor importancia, las que presentamos a continuación:

**Recirculación:** Tiene como finalidad el repaso simple o el apoyo al repaso. Supone un aprendizaje superficial y es

empleada para conseguir un aprendizaje “al pie de la letra”. Se fundamenta en un aprendizaje memorístico asociativo basado en la práctica reiterada, (recircular) repetir una y otra vez la información. Esta técnica resultaría útil para el aprendizaje de materiales que poseen escasa significatividad para el estudiante. El apoyo al repaso puede incluir, por ejemplo, tomar notas, subrayar, copiar, etc.

**Elaboración:** Tiene como finalidad el procesamiento simple y el procesamiento complejo de la información. Supone básicamente integrar y relacionar la nueva información que se va a aprender con los conocimientos previos. El procesamiento simple incluye el uso de mnemotecnias, identificación de palabras - clave, rimas, imágenes mentales y parafraseo, las que seguirían siendo eficaz sobre todo para el aprendizaje memorístico; mientras que el procesamiento complejo abordará habilidades como elaboración de inferencias, resúmenes, analogías y la elaboración conceptual nos dirigirá a un aprendizaje más significativo.

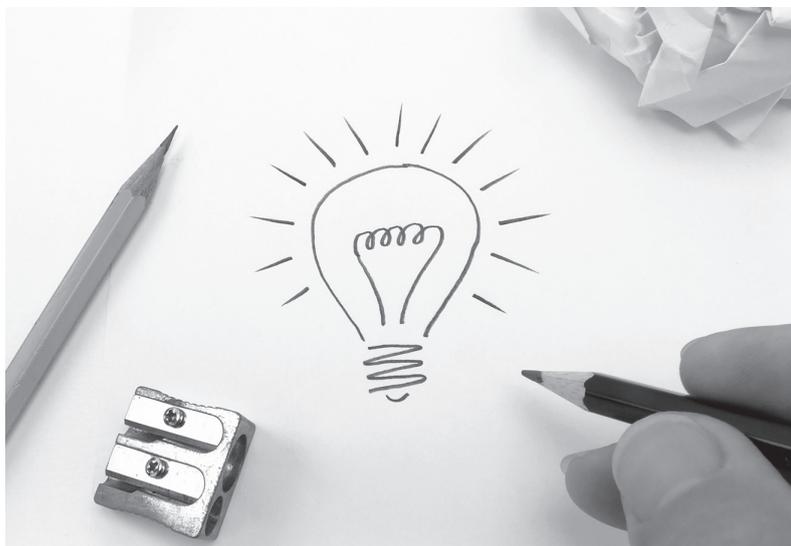
**Organización:** Tiene como primera finalidad, la clasificación de la información, la que utiliza como habilidad el uso de categorías. La segunda finalidad es la jerarquización y la organización de la información, la misma utiliza habilidades y técnicas como las redes semánticas, mapas conceptuales y el uso de estructuras textuales. Permite realizar una reorganización constructiva de la información por aprender. A través de esta técnica, se intenta lograr una representación correcta de la información, aprovechando al máximo las relaciones entre las partes, así como las formas de organización esquemática internalizadas por el estudiante. Se trata de descubrir y construir significados para encontrarle sentido a la información. También las destrezas de pensamiento y solución de problemas podrían incluirse en esta categoría. (Pozo, citado en Díaz Barriga Areco).

De acuerdo con Flavell, estas estrategias tratan un proceso de interiorización muy similar al concepto vyotskiano de «zona de desarrollo próximo», basado en la ley de doble formación. Según esta idea, para que los estudiantes adquieran las estrategias es preciso que las apliquen primero bajo un control externo para más adelante ser capaces de interiorizar ese control, que pasaría al propio estudiante. Este hecho condiciona, sin duda, la forma en que debe abordarse la enseñanza de estrategias de aprendizaje y el lugar que éstas deben ocupar en el diseño curricular. (Pozo).





### 3.3 Rol del docente frente a las estrategias didácticas



Las interrogantes que podemos plantearnos como faro de este apartado son: ¿de qué hablamos cuando nos referimos a “enseñar”? ¿qué supone para el docente facilitar estrategias de aprendizajes significativas?, ¿qué tipo de capacidades requerimos como docentes para influir en el proceso de formación de nuestros estudiantes, de tal manera a que estos transfieran sus aprendizajes en diversos contextos? Estos cuestionamientos, por simple que parezcan, no lo son en absoluto, y subyacen en cualquier planificación didáctica que deseamos desarrollar como pedagogos.

Por ello, conviene destacar la importancia de la actividad docente en la formación de los estudiantes, considerando que la enseñanza ejerce una influencia significativa y que, por consiguiente, los resultados de aprendizajes dependen en buena medida del tipo de proceso de formación que se haya seguido, aun manteniendo dependencias importantes con las condiciones sociales y personales de entrada.

Desde esta perspectiva, puntualizaremos, a continuación, sobre algunos aspectos fundamentales que como docentes debemos considerar en todo proceso de enseñanza y aprendizaje:

#### 1. Planificar el proceso enseñanza – aprendizaje

En palabras sencillas podríamos decir que para elaborar planificaciones significativas es imprescindible tener conocimientos sobre la disciplina y sobre la propia planificación, y tener ideas claras acerca de las capacidades que deseamos desarrollen los estudiantes. En este sentido, lo importante es tomar conciencia que cuando diseñamos nuestra planificación lo que hacemos es situarnos en un espacio de toma de decisiones, en las que influyen nuestras ideas pedagógicas, nuestros conocimientos científicos y nuestra experiencia didáctica.

Una de las estructuras más conocida de planificación didáctica se caracteriza por comprender los siguientes elementos: objetivos, contenidos, estrategias metodológicas y evaluación. Sin embargo, en la actualidad ese esquema se ha enriquecido con la incorporación de otras dimensiones importantes como la contextualización de la planificación (se la sitúa en el marco de circunstancias y condiciones que le dan sentido: el perfil profesional, el Plan de Estudios, las características de la institución y de los estudiantes al que va dirigido, el trabajo del docente, las normas de convivencia, entre otros), las estrategias de apoyo a los estudiantes, que pueden incluir desde el establecimiento de diversos niveles de exigencia hasta la elaboración de guías didácticas, la incorporación de fases de recuperación y la figura de mentores, entre otros, los dispositivos para evaluar el desarrollo de la planificación que implica la puesta en marcha de algún sistema de recogida, análisis y procesamiento de los datos recogidos para regular los procesos didácticos aplicados y los mecanismos de articulación entre las planificaciones de los docentes de la institución educativa.

#### 2. Seleccionar y preparar los contenidos de aprendizaje

Esta competencia se vincula con la anterior y podría formar parte de ella, pero es necesario independizarla por su importancia fundamental, tanto desde el punto de vista científico (seleccionar los contenidos) como didáctico (prepararlos para ser enseñados y aprendidos).

Seleccionar contenidos que sean relevantes y significativos para los estudiantes significa escoger lo más importante de ese ámbito disciplinar, adaptarlos a las necesidades de formación de los estudiantes (al perfil de salida para el que se están formando), adecuarlos a las condiciones de tiempo y de recursos con que contamos, y organizarlos de tal modo que resulten accesibles a nuestros estudiantes y que les abran las puertas para nuevos aprendizajes. Esto exige del docente la experticia en su campo disciplinar, porque ha de tener una visión de conjunto de todos los saberes que este ofrece y ha de saber entrar en la profundidad de la disciplina para saber identificar con solvencia los diversos niveles de relevancia de los contenidos que en ella se abordan, a fin de lograr determinados aprendizajes en los estudiantes.

Otro aspecto a considerar tiene que ver con la secuenciación de los contenidos, esto implica, el orden en que se los abordan y la relación que se establece entre ellos, pues condiciona de manera clara la forma en que los estudiantes podrán aprenderlos. Al respecto, generalmente solemos observar que uno de los problemas más frecuentes de la didáctica es propiciar que los estudiantes vayan



construyendo esquemas conceptuales bien enlazados internamente y que les resulten significativos, es decir, que entiendan bien su sentido y aplicabilidad. La manera en que ordenemos los temas y las conexiones que establezcamos con nuestra planificación e, incluso, con contenidos de otras disciplinas así como con situaciones o problemas de la vida real, servirán de orientación y modelo a la forma en que los estudiantes construyen sus aprendizajes.

Un último aspecto a tener en cuenta es la explicación clara de los contenidos a los estudiantes, es necesario sumergirlos en la situación, ajustar la explicación en función del feedback que se va percibiendo de sus caras, gestos, preguntas, etc. La trascendencia y la transferencia personal que se produce entre los docentes y sus estudiantes en el proceso didáctico son insustituibles por bueno que sea el material o el recurso alternativo que se les otorgue.

### 3. Ofrecer informaciones y explicaciones comprensibles

Los docentes seleccionamos las ideas que deseamos transmitir y las codificamos convirtiéndolas en un mensaje que se hace llegar a los estudiantes a través del canal correspondiente. El estudiante recibe nuestro mensaje y vuelve a decodificarlo (lo reinterpreta utilizando algunos códigos de que dispone) para quedarse a su vez con la idea que extrae de dicho mensaje.

En este contexto, con frecuencia nuestras explicaciones se convierten en procesos enunciativos y discursivos densos y de alto nivel de abstracción cuando hay que explicar una operación, una fórmula, una teoría, una ley o un concepto que resultan difíciles de decodificar y demandan, en cualquier situación, un elevado nivel de concentración mental. Por ello, suele ser beneficiosa la incorporación de elementos narrativos, es decir, recurrir a anécdotas, episodios o sucesos relacionados con el tema abordado, pues permitirá a los estudiantes utilizar esas anécdotas como punto de referencia para recordar los aspectos más conceptuales estudiados en conexión con ellas.

Los docentes podemos reforzar la comprensibilidad a través de varios mecanismos comunicacionales como el manejo de la redundancia y el acondicionamiento de los propios mensajes.

La redundancia se contrapone a la novedad. Los mensajes redundantes son aquellos que repiten el mensaje, vuelven a decir lo mismo de otra manera, se ofrece el mismo mensaje a través de códigos diferentes (por ejemplo, con palabras e imágenes, etc.). El acondicionamiento de los propios mensajes está relacionado con la simplicidad, el orden, la brevedad y la estimulación suplementaria. Tanto un buen manejo de la redundancia como una correcta gestión de los mensajes, ayuda a incrementar la posibilidad de que

nuestras informaciones no solamente lleguen en buenas condiciones a los estudiantes, sino que, además las interpreten en el sentido que nosotros pretendíamos. En síntesis, que entiendan bien lo que deseábamos explicar.

Reforzar la organización de los mensajes tiene que ver, además, con la posibilidad de incorporar una estructura global que permita identificar no solo cada uno de los elementos de la explicación sino de poder relacionarlos.

En síntesis, suele decirse que los buenos comunicadores deben decir, primero, lo que piensan decir, después deben decirlo y deben acabar diciendo lo que han dicho. Así por ejemplo, como docentes primeramente podemos expresar los temas más importantes a tratar, luego los analizamos uno a uno y finalizamos haciendo un resumen de lo que hemos dicho.

### 4. Diseñar estrategias didácticas pertinentes

Las modalidades metodológicas en las que puede desarrollarse la enseñanza son múltiples (magistral, autónomo o individual, grupal, otros). Según se vayan combinando ciertas particularidades de la actuación de docentes y estudiantes tendremos un formato de estrategias metodológicas diferentes. No existe el mejor método, sino aquel que se ajusta mejor a las condiciones de nuestros objetivos formativos, al contenido que hayamos de trabajar, a las características de nuestros estudiantes, a las particularidades del tiempo, espacios y recursos en la que nos podamos mover.

Como docentes nos debemos preocupar de dar con el método o la estrategia didáctica que resulte más conveniente para propiciar un aprendizaje efectivo en el triple sentido, en el que los métodos influyen: aprendizajes de competencias personales (valores y actitudes), aprendi-





zaje de competencias de tipo funcional (capacidad reflexiva y crítica, capacidad de autoevaluación y evaluación, habilidades operativas (esquematisar, resumir, sintetizar, integrar partes, etc.) y manejo de fuentes de diferentes signos, aprendizaje de contenidos de la disciplina.

### 5. Manejar las nuevas tecnologías

En un mundo tecnológico como el actual, el empleo de las nuevas tecnologías constituye un plus de valor en el quehacer pedagógico del docente. Exige de los docentes (aparte del dominio de la didáctica genérica) nuevas competencias tanto en la preparación de la información y las guías del aprendizaje como en el mantenimiento de una relación tutorial a través de red. Exige de los estudiantes, junto a la competencia técnica básica para el manejo de los dispositivos técnicos, la capacidad y actitudes necesarias para llevar a cabo un proceso de aprendizaje autónomo y para mantener una relación fluida con el docente.

El rol del docente para ayudar a los estudiantes a navegar en el inmenso océano de información disponible, es enseñarles a buscar lo más pertinente, orientando su búsqueda y aportando criterios para la selección. Hay una sobreabundancia de información en todas las disciplinas. El problema es que los estudiantes no saben qué hacer con ella, ni discriminan "entre lo que vale y no vale". Los docentes seguimos transmitiendo información pero lo que los estudiantes precisan son criterios para saber integrarla en estructuras conceptuales que les sean útiles en su proceso de aprendizaje. Necesitan decodificadores para interpretarla, entenderla y poder construir su propio conocimiento.

Además, las nuevas tecnologías exigen del docente la utilización de nuevos canales de comunicación (email, internet, chat, videoconferencia, otros). Por ejemplo, la realización de tutorías a través del correo electrónico, la realización de un debate a través de un chat o estableciendo un foro de debate en la red en el que los estudiantes van dejando sus opiniones en torno a la lectura de un texto, la solución de un problema o de cualquier otra situación que se acerque a la realidad u objeto de estudio. En fin, las posibilidades son múltiples y variadas.



### 6. Comunicarse efectivamente con los estudiantes

La habilidad para manejarse de manera adecuada en el contexto de las relaciones interpersonales en que se produce la interacción docente-alumnos es un importante componente del perfil profesional de los docentes. Desde el punto de vista de la formación no se trata tanto de dotarse de unas técnicas relacionales (aprender técnicas para saber diseñar formas de relación y resolver problemas que surjan) cuanto de estar en disposición de someter a análisis permanente los procesos interactivos en los que estamos implicados. Aprender técnicas está bien y ayuda en algunos aspectos (saber dirigir una reunión, saber desarrollar una mediación formal en conflicto, etc.), pero





como las relaciones se construyen con elementos no solo racionales sino también emocionales (que generalmente ni siquiera son conscientes), la pura técnica es insuficiente y se precisa de esa revisión permanente.

## 7. Evaluar

El docente es la persona mejor situada para generar el cambio de la cultura evaluadora, en el día a día del aula, por su preparación, por su compromiso a favor de la formación de los estudiantes y por la posibilidad que tiene de actuar en el proceso de enseñanza – aprendizaje, en suma, es la persona idónea para ejercer el papel preponderante de evaluador.

El proceso de evaluación demanda del docente la capacidad de observar, recoger datos significativos y analizarlos para percibir, lo antes posible, las capacidades de los estudiantes y las disfunciones de la acción educativa, a fin de tomar decisiones que conduzcan a alcanzar altos niveles de aprendizajes.

Los docentes sabemos que el estudiante aprende mucho más de lo que se puede comprobar en una prueba. Como también, que la prueba no garantiza que aquello que se pregunta sea lo más relevante. Sin embargo, el docente puede recoger información acerca de lo que no sabe el estudiante. La corrección de pruebas, de producciones escritas y prácticas, las observaciones realizadas y las entrevistas, etc, son indispensables para comprender y superar los errores o contrastar los diferentes puntos de vista. En este sentido, la tarea prioritaria del docente

es orientar el aprendizaje y asegurar que aquello que se aprende es valioso y merece dedicarle tiempo y esfuerzo.

El docente tiene que actuar como crítico reflexivo y no solo como calificador. Su función es la enseñanza de la auto-evaluación. La corrección informada y comentada de un trabajo o una prueba ayuda a aprender. Al respecto, es importante que la corrección tenga como base e intención la información para la formación del estudiante, que no es lo mismo que una evaluación sobre el estudiante. Lo más relevante de la actuación del docente en el proceso de evaluación es su interacción con el estudiante, pues lo realiza desde y junto al mismo mientras este construye su aprendizaje. Por consiguiente:

- Debemos conocer cuál es la situación de partida del estudiante para ajustarnos a ella, y así poder adaptar las estrategias de enseñanza-aprendizaje y continuar el proceso en el punto desde el cual éste pueda avanzar.
- Evaluar el proceso de aprendizaje de tal modo a reconducirlo, en el caso de que se presenten dificultades, introduciendo medidas correctoras desde los ámbitos pedagógicos.
- Evaluar el proceso de aprendizaje al término de un proceso didáctico, del desarrollo de una unidad o etapa para apreciar el grado de desarrollo de las capacidades establecidas en la disciplina. Esta situación posterior se convierte, a su vez, en la situación inicial de una futura fase de aprendizaje.

## 3.4 Técnicas activas de aprendizajes

### 3.4.1 NOTICIERO

Consiste en la creación de un programa de televisión Tipo Noticiero al cual debe escribirse un nombre creativo. Es una dramatización de la presentación de noticias. Los estudiantes divididos en pequeños grupos (5 o 6 integrantes) elaboran “cables periodísticos” (noticias) de lo que conocen sobre un determinado tema, de acuerdo a las áreas académicas o de acuerdo a sub temas de una disciplina en particular. Para ello, el docente selecciona previamente las **Capacidades**, y el **eje temático** a ser abordados por los estudiantes.

#### Procedimiento:

1. Se piden voluntarios por temas de interés.
2. El grupo de estudiantes divididos en 5 o 6 integrantes.
3. El docente les pide a los estudiantes que redacten cables noticiosos sobre hechos concretos en relación a determinado tema.

Pueden ser obtenidos de una investigación, información ver-

dadera que guarde relación con el tema, o de materiales ya proveídos por el docente o incluso transformar la información del libro de texto que poseen en formato de noticia.

4. Una vez que concluyen se pasa al plenario donde se colectivizan todos los cables informativos (noticias) en forma de noticiero.
  - Cada grupo anota si hay información que ellos no conocían.
  - Si hay alguna información que el plenario juzga que no es correcta, la discute y se decide si se acepta o no.
5. Se prepara el ambiente, es necesaria una mesa, un logo atrás de los presentadores, una vestimenta que asemeje al de los presentadores de televisión.
6. Los alumnos pueden memorizar o leer sus informaciones. (Se puede solo dramatizar en vivo o grabar con celular o filmadora para luego ser proyectado).

**Observaciones:** Puede haber bloque de entrevistas, donde se presentan opiniones de las personas respecto al tema o respecto



a sucesos ocurridos en alguna localidad. Puede ser serio o humorístico. Queda a creatividad de los estudiantes.

- Se evalúa el dominio del tema del estudiante, además de valorar el esfuerzo en la puesta en escena. La evaluación puede darse repitiendo la aplicación de la técnica pero con la variante del "Noticiero con corte de energía".

**Nota:** El "Noticiero con corte de energía", consiste en que la noticia que presenta un primer grupo, es interrumpida por un corte de energía (el docente indica el momento del corte), y debe ser continuada por el siguiente grupo indicado. Esto favorece la atención en la presentación de los compañeros. La continuación debe ser coherente con respecto al mensaje transmitido.

### 3.4.2 CONFERENCIA

Es una técnica de exposición oral y gráfica, preparada y expuesta por un alumno(a). También se suele hacer de manera grupal, después de haber realizado una investigación.

Para la presentación de la conferencia los alumnos deberán complementar su trabajo de investigación con materiales de apoyo, tales como: mapas, dibujos, gráficos, transparencias, maquetas registros de audio, etc., y con demostraciones, juegos, dramatizaciones y otros recursos que el o los expositores decidan emplear.

#### Habilidades que desarrolla

- Manejo de información.
- Expresión oral.
- Confianza y seguridad en sí mismo.

#### Materiales

Los materiales son variados, así tenemos:

- Papelógrafos, marcadores, paneles, retroproyector, todo aquello que haya decidido usar el expositor.
- Una sala que se pueda adaptar para una conferencia si el

colegio dispone de ella. En caso contrario se puede hacer uso del aula de clase.

#### Procedimiento

- Elaborar un esquema para guiar la conferencia. Es necesario que los alumnos conviertan las preguntas de la investigación en títulos y las escriban en un papelote. El docente verifica que haya correspondencia entre las preguntas y los títulos.
- Se establecen criterios para evaluar la conferencia. Es necesario establecer los en grupo.
- Elaboración y/o acopio de material ilustrativo que complemente e ilustre la conferencia para hacerla más ágil y clara (fotos, mapas, objetos, recortes de periódico). Es recomendable que las ilustraciones enfoquen los temas de mayor dificultad.
- Diseño y creación con ayuda del docente de una actividad que pueda ser realizada por los participantes, orientada a clarificar y puntualizar las ideas fuerza del mismo (sociodrama, juego, crucigrama, acróstico, experimento, etc.).
- Ensayo de la conferencia. El docente evalúa el ensayo reforzando los aspectos positivos, ayudándolos en las dificultades.
- Presentación de la Conferencia.
- Los asistentes formularán preguntas al ponente. Cada pregunta se anotará en una tarjeta que recibirá al término de la conferencia. Las respuestas pueden darse una a una o agrupando las similares. Ocasionalmente, el docente participa respondiendo preguntas para las cuales los conferencistas no tienen respuestas.
- La evaluación de la conferencia se hace con la participación de todos los alumnos teniendo en cuenta los criterios establecidos y haciéndoles llegar recomendaciones pertinentes. Para evaluar la conferencia se puede hacer uso de una ficha (ver anexo 1), pedir a los alumnos que realicen un organizador visual, etc.

#### ANEXO 1

Nuestra conferencia	
Alumno:	L/ANL
Fecha:	
Se expresa con vocabulario pertinente	
Emplea palabras propias	
Explica con claridad las ideas	
Utiliza ejemplos concretos	
Emplea adecuadamente el material auxiliar	
Relaciona el tema con otros	
Responde acertadamente las preguntas de sus compañeros	



### 3.4.3 APRENDIZAJE BASADO EN PROBLEMAS (ABP)

#### Concepto

Es una técnica didáctica centrada en el estudiante que promueve el aprendizaje a través de un proceso sistemático que comienza con el planteamiento de un problema complejo (para el nivel en el que se va a aplicar) que se busca solucionar y a través de esto aprender los contenidos curriculares. Se originó en escuelas de medicina y pronto se extendió a un gran número de disciplinas y materias distintas.

#### Propósitos del ABP

Desencadenar, mediante el uso de situaciones problemáticas reales y desestructuradas, preguntas en el estudiante que le provoquen la necesidad de investigar con el fin de construir sus conocimientos y desarrollar habilidades.

Primero se detecta el problema en el proceso de aprendizaje y éste sirve como foco y estímulo para la aplicación de habilidades de solución de problemas o de razonamiento, así como para la búsqueda o el estudio de la información o conocimientos necesarios para comprenderlos mecanismos responsables del problema y el modo de resolverse.

A continuación se presenta un cuadro comparativo entre un aprendizaje con técnicas tradicionales y la técnica del ABP.

Aprendizaje Tradicional	Aprendizaje Basado en Problemas
El profesor asume el rol de experto o autoridad formal.	Los profesores tienen el rol de facilitador, tutor, guía, co-aprendiz, mentor o asesor.
Los profesores transmiten la información a los alumnos.	Los alumnos toman la responsabilidad de aprender y crear alianzas entre alumnos y profesor.
Los profesores organizan el contenido en exposiciones de acuerdo a su disciplina.	Los profesores diseñan su curso basado en problemas abiertos e incrementan la motivación de los estudiantes presentando problemas reales.
Los alumnos son vistos como "recipientes vacíos" o receptores pasivos de información.	Los profesores buscan mejorar la iniciativa de los alumnos y motivarlos. Los alumnos son vistos como sujetos que pueden aprender por cuenta propia.
Las exposiciones del profesor son basadas en comunicación unidireccional: la información es transmitida a un grupo de alumnos.	Los alumnos trabajan en equipos para resolver problemas, adquieren y aplican el conocimiento en una variedad de contextos. Los alumnos localizan recursos y los profesores los guían en este proceso.
Los alumnos trabajan por separado.	Los alumnos conformados en pequeños grupos interactúan con los profesores quienes les ofrecen retroalimentación.

#### Pasos a seguir para aplicar la técnica del ABP

##### PASO 1. Lectura y análisis del escenario del problema.

Se pretende en este momento que el estudiante verifique si comprende el escenario en el que se desenvolverá.

Si fuese un texto, este paso necesita la lectura del mismo varias veces con el fin de disipar cualquier duda.

##### PASO 2. Definición del problema.

Se busca en este paso identificar el problema al cual nos enfrentamos, reconocer el escenario en el que trabajará y cuáles son los retos que deben enfrentarse.

No debe obsesionarse uno con la solución del problema, cuando hay tantos problemas en la vida que no tienen solución.

##### PASO 3. Lluvia de ideas.

Este paso pretende que el alumno se plantee qué es lo que debe conocer para encontrar la solución, partiendo de la toma de conciencia entre lo que se sabe y lo que no.

Se busca responder a las preguntas: qué, cómo, quién, dónde, cuándo, por qué, para qué, etc.

##### PASO 4. Clasificación de las ideas.

Como en el paso anterior surgieron ideas de manera espontánea, hasta a veces desordenada, este paso pretende ordenarlas y organizarlas según la intención dada.

Las ideas quedan jerarquizadas y normalmente esta estructura es la que se sigue para la solución del problema.



**PASO 5. Formulación de los objetivos del aprendizaje.**

Uno de los momentos más importantes del ABP, que demanda del estudiante mucha responsabilidad y compromiso.

Los objetivos serán los que guíen la acción posterior, es decir, la investigación. El fin último será el desarrollo de capacidades

**PASO 6. Investigación.**

Investigar no es igual a buscar en fuentes bibliográficas. Investigar implica:

- Buscar hasta encontrar, pero buscar con una intención.
- Indagar en el lugar preciso.
- Manejar fuentes adecuadas.

- Leer comprensivamente la información.
- Interpretar la información.

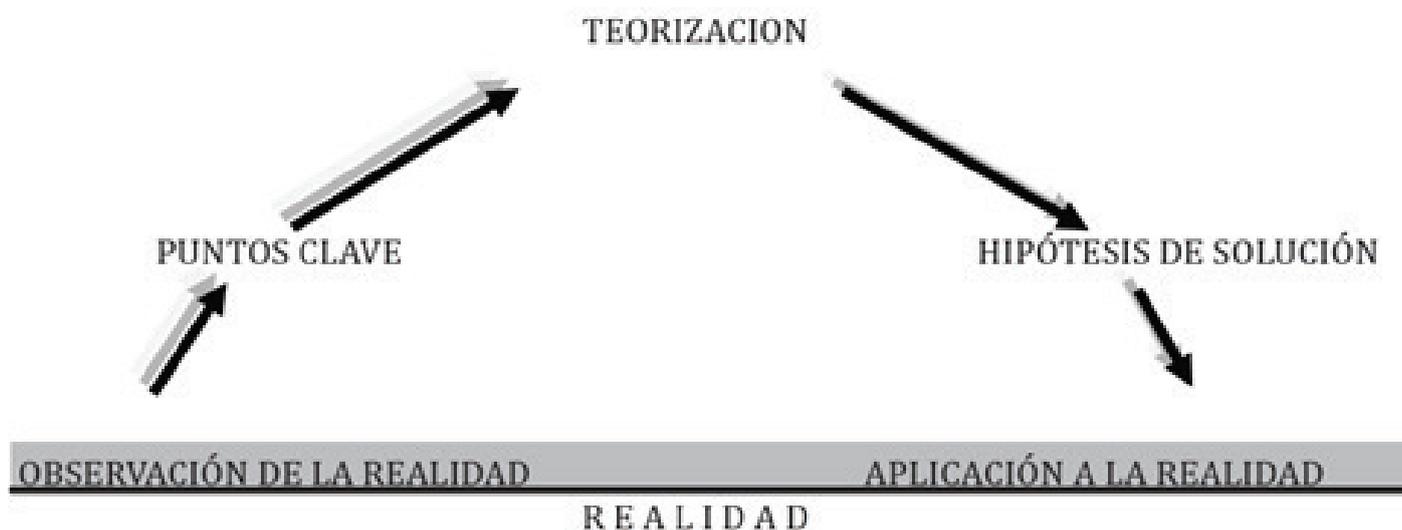
**PASO 7. Presentación y discusión de los resultados.**

Este es un momento fundamental. Todo lo anterior no tendrá demasiado significado si la comunicación de los resultados falla.

La manera en la que los alumnos presentan los resultados obtenidos no es demasiado importante pero siempre teniendo cuidado en el fondo y la forma de hacerlo.

NOTA. Es muy conveniente que los casos de ABP queden documentados para su uso posterior o para que otros docentes los utilicen.

**3.4.4 El Arco**



**Los procesos y procedimientos:**

**1. Observación de la Realidad:**

La capacidad buscada es la percepción de hechos reales relevantes a la disciplina, de un modo global y sincrético, un tanto impresionista e ingenuo por constituir una primera aproximación a la realidad. Se busca también promover la expresión de lo observado y sentido por los alumnos.

Las siguientes técnicas pudieran utilizarse en esta etapa, entre otras:

- a. Visita a lugares relevantes
- b. Visita a museos de ciencias.
- c. Entrevista con exponentes del área, o tema en cuestión, etc.
- d. Lectura de casos.

**2. Puntos Clave:**

La capacidad buscada en esta etapa es la identificación, por los estudiantes, de las variables más importantes asociadas a lo que observaron en la realidad. Es decir, distinguir los aspectos más determinantes de los aspectos puramente circunstanciales y secundarios.

Técnicas utilizables en esta etapa incluyen:

- a. Trabajo en grupos
- b. Lluvia de ideas
- c. Simposio
- d. Dramatización, sociodrama, etc.
- e. Consulta a Banco de Datos



### 3. Teorización:

La capacidad a desarrollar es localizar la estructura del problema, es decir, a partir de observar la realidad e identificar los Puntos Claves analizar las relaciones entre dichos Puntos Claves y, a través de la comprensión del problema, por el grupo identificando las causas y posibles consecuencias del problema. Teorizar no significa aprender teorías ajenas sino formular la propia teoría del grupo, sobre el problema. Naturalmente, el conocimiento de otras teorías puede ayudar significativamente.

Técnicas posibles:

- a. Consulta con científicos o expertos en el tema.
- b. Invitación a expertos externos a disertar sobre la materia
- c. Consulta bibliográfica
- d. Seminario

### 4. Hipótesis de Solución:

Habiendo observado la realidad y reflexionado sobre ella en la Teorización, los estudiantes están listos para desarrollar una capacidad muy importante, cual es la de ofrecer alternativas de solución. Esto implica el desarrollo de la creatividad, la innovación, la visión prospectiva.

Se puede utilizar las siguientes técnicas, entre otras:

- a. Lluvia de ideas
- b. Trabajo en grupos
- c. Mesa redonda
- d. Panel de oposición
- e. Consulta a expertos
- f. Lectura de informes
- g. Consulta con organizaciones

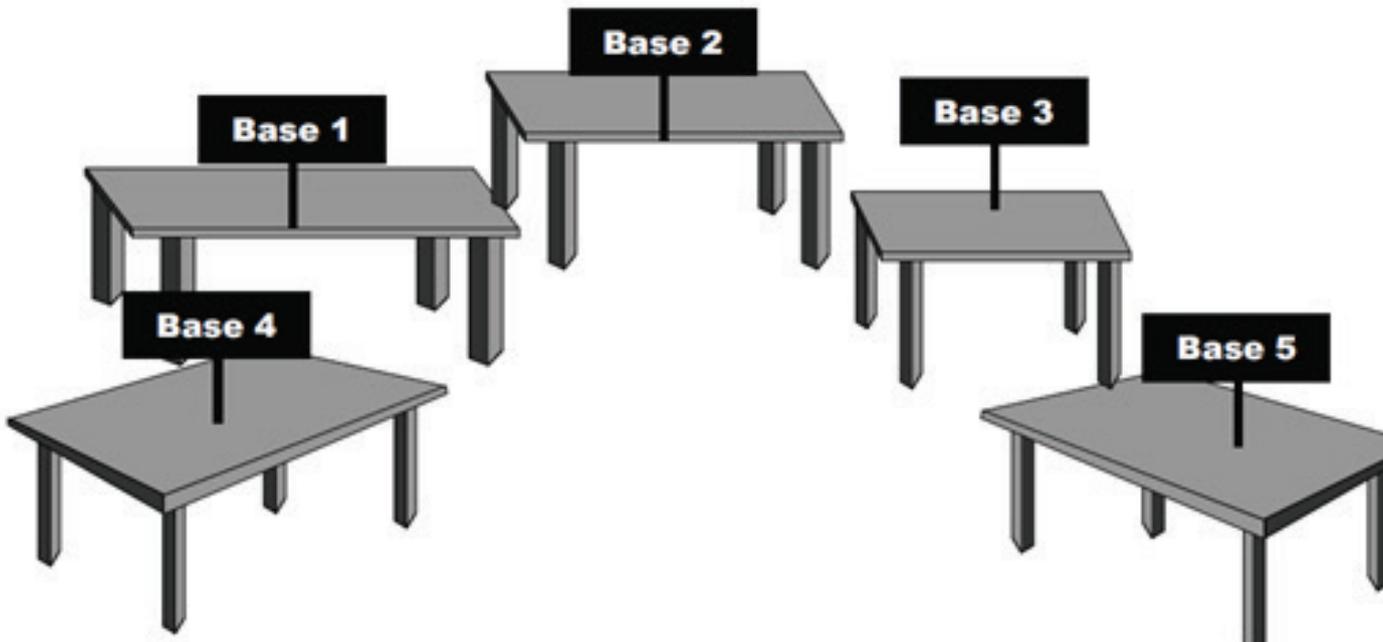
### 5. Aplicación a la Realidad:

En esta etapa se busca desarrollar la capacidad de ejecutar las soluciones consideradas más relevantes y viables por los alumnos y el profesor. Esto puede exigir el ejercicio y la práctica de habilidades y destrezas.

Posibles técnicas:

- a) Taller
- b) Método de proyectos
- c) Participación en proyectos comunitarios
- d) Propuesta de acciones comunitarias
- e) Participación en programas de Radio, otros.
- f) Elaboración de recomendaciones

#### 3.4.5 Tour de bases



Es una estrategia de enseñanza-aprendizaje, que permite a los estudiantes recoger y organizar información a fin de cumplir con los retos que el docente propone en las

distintas bases. Se espera que al término, obtengan la construcción de los aprendizajes y habilidades deseadas por el docente.



### 3.4.6 Tarea

Con esta estrategia, el docente realmente cumple con la función de estrategia en el sentido de preparar su clase, disponer los procesos y cómo se utilizarán los recursos, dar las orientaciones y luego realizar un acompañamiento, ofreciendo la ayuda que se requiera (si se requiere).

El profesor deja de exponer los conocimientos para dejar que los alumnos sean los verdaderos protagonistas de la clase. Sin embargo, no por eso su rol pierde relevancia. Al contrario, es el estratega, el que piensa en su clase, el que propone actividades y tareas creativas que consigan movilizar a los alumnos para que aprendan haciendo, aplicando conocimientos.

### 3.4.7 WebQuest

La webquest es una herramienta utilizada como recurso didáctico por los profesores, forma parte de un proceso de aprendizaje guiado, con recursos principalmente procedentes de Internet, que promueve la utilización de habilidades cognitivas superiores, el trabajo cooperativo, la autonomía de los estudiantes e incluye una evaluación auténtica.

#### Proceso:

Una webquest se compone de seis partes esenciales: introducción, tarea, proceso, recursos, evaluación y conclusión.

1. **Introducción:** contiene una información muy sintética del tema en torno a la cual va a desarrollarse la webquest, con el fin de despertar el interés y la motivación del estudiante sobre dicho tema.
2. **Tareas:** explican en forma detallada las actividades que los estudiantes deberán llevar a cabo.
3. **Proceso:** describe los pasos que el estudiante debe seguir para llevar a cabo la tarea propuesta, incluyendo una serie de enlaces necesarios para realizar cada paso.
4. **Recursos:** consiste en una lista de sitios web que como profesor de la disciplina ha ido preparando o delimitando para guiar al estudiante a realizar la tarea. Estos deben haber sido seleccionados previamente para que el estudiante pueda enfocar su atención en el tema, ser actuales de manera que sean atractivos y motivantes para los mismos. Podrán consultar otras fuentes, incluso contrastar la información con fuentes impresas. Se debe evitar el "vagabundeo" en la web, por eso es imprescindible incluir de antemano unas páginas web que se deben consultar y donde existe información relevante y de calidad para resolver el problema o la tarea.

5. **Evaluación:** contiene criterios claros, consistentes y específicos para evaluar las producciones o los resultados. Pueden incluirse criterios sobre el proceso.
6. **Conclusión:** expone sintéticamente las capacidades que se espera que hayan alcanzado los estudiantes de tal forma que les ofrezca información de las pretensiones y objetivos últimos a los que se pretende llegar.

### 3.4.8 Investigación

Es toda actividad humana orientada a descubrir algo desconocido, pero esta actividad se basa en "huellas" que el investigador tiene que identificar para llegar a la solución de un problema. Ésta palabra deriva etimológicamente de los términos latinos in (en, hacia) y vestigum (huella, pista).

El proceso de investigación puede aplicarse en todos los niveles educativos, pero debe adaptarse didácticamente el nivel de exigencia y complejidad a las características de los estudiantes, respetando el proceso de investigación, a su vez pueden tener variaciones de acuerdo a la teoría en la que se basa. En el Nivel Medio puede profundizarse cada parte del proceso de investigación.

La investigación incluye los siguientes procesos integrados: Preguntas referidas al problema. Objetivos de investigación. Metodología (Métodos y técnicas utilizados). Hipótesis (respuesta tentativa al problema). Recopilación de información (teórica o de campo donde se aplica los métodos y técnicas). Análisis de informaciones. Elaboración de conclusiones.

Muy importante es consignar la fuente de información utilizada en el desarrollo del trabajo.

- En cuanto a la Bibliografía, se presenta de manera alfabética los libros, por apellido del autor y nombre. (Año). Nombre del libro. Editorial.
- Para los sitios Web, aparte de los datos de autor y el título del artículo, también se consigna el sitio web donde está disponible la información y la fecha de acceso al mismo.

### 3.4.9 Seis sombreros para pensar

El método es simple. Se tiene seis sombreros, cada uno de un color diferente. En cualquier momento un pensador puede escoger ponerse uno de los sombreros o se le puede pedir que se lo quite. Todas las personas de la reunión pueden usar un sombrero de un color concreto durante un tiempo en un momento determinado. Los sombreros involucran a los participantes en una especie de juego de rol mental.



**HECHOS  
Y DATOS**

Una mirada objetiva a los datos y a la información. "Los hechos son los hechos".



**PELIGROS,  
DIFICULTADES  
Y RIESGOS**

Significa la crítica, lógica negativa, juicio y prudencia. El por qué algo puede ir mal.



**CREATIVIDAD**

La oportunidad para expresar nuevos conceptos, ideas, posibilidades, percepciones y usar el pensamiento creativo.



**SENTIMIENTOS,  
INTUICIÓN**

Legitima los sentimientos, presentimientos y la intuición, sin necesidad de justificarse.



**BUSCA LADO  
POSITIVO**

Simboliza el optimismo, lógica positiva, factibilidad y beneficios.



**FACILITADOR**

Control y gestión del proceso del pensamiento.

El método puede parecer extremadamente simple e incluso infantil, pero funciona. He aquí algunos beneficios del método:

- Es fácil de aprender y utilizar y tiene un atractivo inmediato. La visualización de los sombreros y de los colores ayuda a ello.
- Da tiempo disponible para el esfuerzo creativo deliberado. Tu puedes pedir “tres minutos de pensamiento de sombrero verde”.
- Permite la expresión legítima de sentimientos e intuiciones en una reunión - sin justificaciones ni disculpas. “Esto es lo que siento”.
- Proporciona una manera simple y directa de conmutar el pensamiento sin ofender. “Qué tal un poco de pensamiento de sombrero amarillo sobre este punto?”
- Requiere que todos los pensadores sean capaces de utilizar cada uno de los sombreros en vez de quedarse cerrados en sólo un tipo de pensamiento.
- Separa el ego del rendimiento en el pensar. Libera las mentes capaces para poder examinar un tema más completamente.
- Proporciona un método práctico de pensar para utilizar diferentes aspectos del pensamiento en la mejor secuencia posible.
- Se escapa de los argumentos en pro y en contra y permite a los participantes colaborar en una exploración constructiva.
- Hace las reuniones mucho más productivas.

Los sombreros son más efectivos usados a ratos, utilizando un sombrero en cada momento para obtener un determinado tipo de pensamiento. Cuando es necesario explorar un tema completamente y de manera efectiva, se puede crear una secuencia de sombreros y después usarlos cada uno por turnos: “Sugiero que empecemos con el blanco y después cambiemos al verde y ...” El sombrero azul se utiliza para componer estas secuencias, para comentar sobre el tipo de pensamiento que se está produciendo, para resumir lo que se ha pensado y llegar a conclusiones.

En Matemática, la técnica podría utilizarse para la dinamización de la resolución de problemas, de manera grupal.

Los sombreros estarían distribuidos de la siguiente manera:

- **Sombrero negro:** los que porten este color de sombrero serán los encargados de analizar el problema y decir si falta algún dato para poder resolverlo, si hay algún dato inútil, de comentar las dificultades que podrían tener en el momento de resolverlo y las atenciones que deben ser prestadas.
- **Sombrero blanco:** los que porten este color de sombrero serán los encargados de comentar cuáles son los datos con los que se cuenta, cuál podría ser la utilidad de resolver situaciones como esa, compararlas con situaciones del vivir cotidiano, etc.
- **Sombrero rojo:** los que porten este color de sombrero estarán encargados de representar de alguna manera más sencilla la situación problemática, ya sea con gráficos, esquemas, comparación con algún problema más sencillo, si se utilizarán fórmulas, etc.
- **Sombrero amarillo:** los que porten este color de sombrero estarán encargados de dar opciones de solución, sin analizar cuál es la más sencilla o la más corta, simplemente deberán exponer las distintas maneras de encarar el problema y resolverlo.
- **Sombrero verde:** las personas que tengan este color de sombrero deberán poner en práctica las ideas expresadas por los compañeros. No emite opinión sobre la dificultad de ninguno de los procedimientos, simplemente se limita a realizarlos.
- **Sombrero azul:** por último, estos estudiantes se encargarán de evaluar las distintas estrategias de solución implementadas y decidir cuál es la que optimiza el tiempo y el esfuerzo y fundamentar por qué opinan eso.

# 4

**El método heurístico en la  
resolución de problemas.**  
«Matemática 3»



## 4 El método heurístico en la resolución de problemas, según George Polya



**George Polya**

**Matemático norteamericano de origen húngaro (1887-1985).**

Polya proporciona el método heurístico para solucionar los problemas de todas las clases, no simplemente los matemáticos, y describir cómo la solución de problemas debe ser enseñada y ser aprendida. Trabajó además en teoría del número, análisis combinatorio y probabilidad

Para la resolución de problemas, George Polya en 1957, sugirió el importante método que consta de los siguientes pasos:

### **PRIMERO · COMPRENSIÓN DEL PROBLEMA**

Corresponde analizar minuciosamente el enunciado o planteamiento del problema con la intención de reconocer la incógnita, la información o los datos presentados.

Algunas preguntas que podrían ayudar a la comprensión son:

- ¿Cuál es la información que proporciona el problema?
- ¿Hay información irrelevante?
- ¿Qué pide el problema?
- ¿Cuáles son las condiciones que relacionan los datos en el problema?
- ¿Es posible hacer un gráfico, un esquema o un diagrama?
- ¿Es posible estimar la respuesta?



## SEGUNDO · DISEÑO DE UN PLAN

En esta etapa se debe establecer un plan para resolver el problema. Para ello se recomienda pensar en problemas conocidos que tengan una estructura análoga a la del que se quiere resolver.

Contestar preguntas como:

- ¿Recuerdo alguna situación parecida que me ayude a resolver ésta?
- ¿Puedo resolver el problema por partes?
- ¿Necesito información adicional para resolver el problema?
- ¿Qué estrategia utilizaré para resolver el problema?
- ¿Puedo organizar los datos en tablas o gráficos?

## TERCERO · EJECUCIÓN DEL PLAN

En esta etapa se aplica el plan seleccionado y se resuelve el problema, monitoreando todo el proceso de solución.

## CUARTO · EVALUACIÓN DEL PLAN

Aquí se debe hacer una revisión crítica del proceso seguido. Cerciorarse si la solución es correcta. Encontrar otros caminos de solución.

También es importante establecer conexiones y extensiones del problema original en otros contextos.

Se puede orientar esta etapa utilizando las siguientes preguntas:

- ¿Es correcta la solución obtenida?
- ¿Puedo describir el razonamiento seguido?
- ¿Existe otra manera de resolver el problema?
- ¿Es posible usar el método empleado para resolver problemas semejantes?



## Bibliografía sugerida

- ABDALA, C. Carpeta de matemática 2 / C. Abdala, L. Garaventa, M. Real. -- Buenos Aires: Aique, 2000.
- ALTMAN, S. M. Matemática polimodal / S. M. Altman, C. R. Comparatore, L. E. Kurzrok. -- Buenos Aires: Longseller, 2003. -- v. 8.
- ÁLVAREZ, F. Fractal 4 / F. Álvarez, A. Arribas, A. Ruiz. -- Madrid: Vicens Vives, 1997.
- ARDILA GUTIÉRREZ, V. H. Enciclopedia Nova matemática. -- Bogotá: Voluntad, 1998. -- v. 6.
- AVOLIO DE COLS, Susana. Evaluación del proceso de enseñanza- aprendizaje / Susana Avolio de Cols. -- Buenos Aires: Marymar, 1994. -- 303 p.
- \_\_\_\_\_. Evaluación de proyecto en aula / Susana Avolio de Cols. -- Buenos Aires: Marymar. -- [199\_?]
- Beta 1 / F. Corbalán Yuste... [et al.]. -- Barcelona: Vicens Vives, 2003.
- BONGIOVANI, V. Matemática e vida / V. Bongiovani, O. R. Vissoto, J. L. Laureano. -- San Pablo: Ática, 1993.
- BONJORNO, J. R. Matemática fundamental / J. R. Bonjorno, J. R. Giovanni. -- [S. l.]: FTD, 1998.
- \_\_\_\_\_. Matemática 3 / J. R. Bonjorno, J. R. Giovanni. -- [s.l.]: FTD, 1990.
- Castelnuovo, L. Didáctica de la matemática moderna. -- México: Trillas, 2004.
- CORBALAN, F. La matemática aplicada a la vida cotidiana / F. Corbalán. -- [s.l.]: Grao, 1998.
- DANTE, L. Didáctica de la resolución de problemas de matemáticas / L. R. Dante. -- Sao Paulo: Ática, 1997.
- \_\_\_\_\_. Matemática 1/ L. R. Dante. -- San Pablo: Ática, 2002.
- \_\_\_\_\_. Matemática 2/ L. R. Dante. -- San Pablo: Ática, 2002.
- \_\_\_\_\_. Matemática 3/ L. R. Dante. -- San Pablo: Ática, 2002.
- FLORES CASTILLO, René. Metodología de la matemática / René Flores Castillo. -- Valparaíso.
- FLOREZ OCHOA, Rafael. Evaluación pedagógica y cognición / Rafael Florez Ochoa. -- Bogotá: Mc Graw Hill, 2000. -- (Docente del siglo XXI cómo desarrollar una práctica docente competitiva).
- GARCÍA, A. M. Fracciones y problemas / A. M. García, G. Zorzoli. -- En: Lápiz y papel: matemática 1.º ciclo EGB (set. 1997). -- 2.ª ed. -- Buenos Aires: Tiempos, 1997.
- GARCIA, A.M. Matemática / A. M. García, G. Zorzoli. -- En: Lápiz y papel: Matemática 1.º ciclo (mar. 1996). -- Buenos Aires: Tiempos, 1996.
- \_\_\_\_\_. Las medidas / A. M. García, G. Zorzoli. -- En: Lápiz y papel: Matemática 2.º ciclo EGB (dic. 1998). -- Buenos Aires: Tiempos, 1998.
- GONZÁLEZ, M. Matemática práctica / M. González, F. León, M. Villegas. -- Bogotá: Voluntad, 1995. -- v. 6.
- GUASH, Antonio. El idioma guaraní: gramática y antología de prosa y verso. -- 7.º ed. -- Asunción: CEPAG, 1996.
- GUZMÁN, M. Matemáticas / M. Guzmán, J. Cólera, A. Salvador. -- Madrid: Anaya, 1992.
- \_\_\_\_\_. Para pensar mejor / M. Guzmán, J. Cólera, A. Salvador. -- Madrid: Pirámide, 2004.
- LEHMANN, C. H. Álgebra / C. H. Lehmann. -- [s.l.]: Limusa, 1999.
- El libro de texto en la escuela: textos y lecturas / Graciela M. Carbone, directora. -- Buenos Aires: Miño y Dávila, 2001. -- 253 P.
- Matemática 2000: enciclopedia / Departamento de Investigación Educativa. -- [s.l.]: Voluntad, 1995. -- v. 6.
- Matemática 3 / J. Cólera... [et al.]. -- [s.l.]: Anaya, 1998.
- MELIA, Bartomeu. Elogio de la lengua guaraní: contexto para una educación bilingüe en el Paraguay / Bartomeu Melià. -- Asunción: CEPAG, 1995.
- Números enteros / A. M. García... [et al.]. -- En: Lápiz y papel: Matemática 3.º ciclo EGB. -- Buenos Aires: Tiempos, 1996.
- PAENZA, A. Matemática... ¿estás ahí?: sobre números, personajes, problemas y curiosidades / A. Paenza. -- Buenos Aires: Siglo XXI, 2006.
- PARAGUAY. Ministerio de Educación y Cultura. El currículum en la educación media y los transversales / Ministerio de Educación y Cultura. -- Asunción: MEC, 2002.



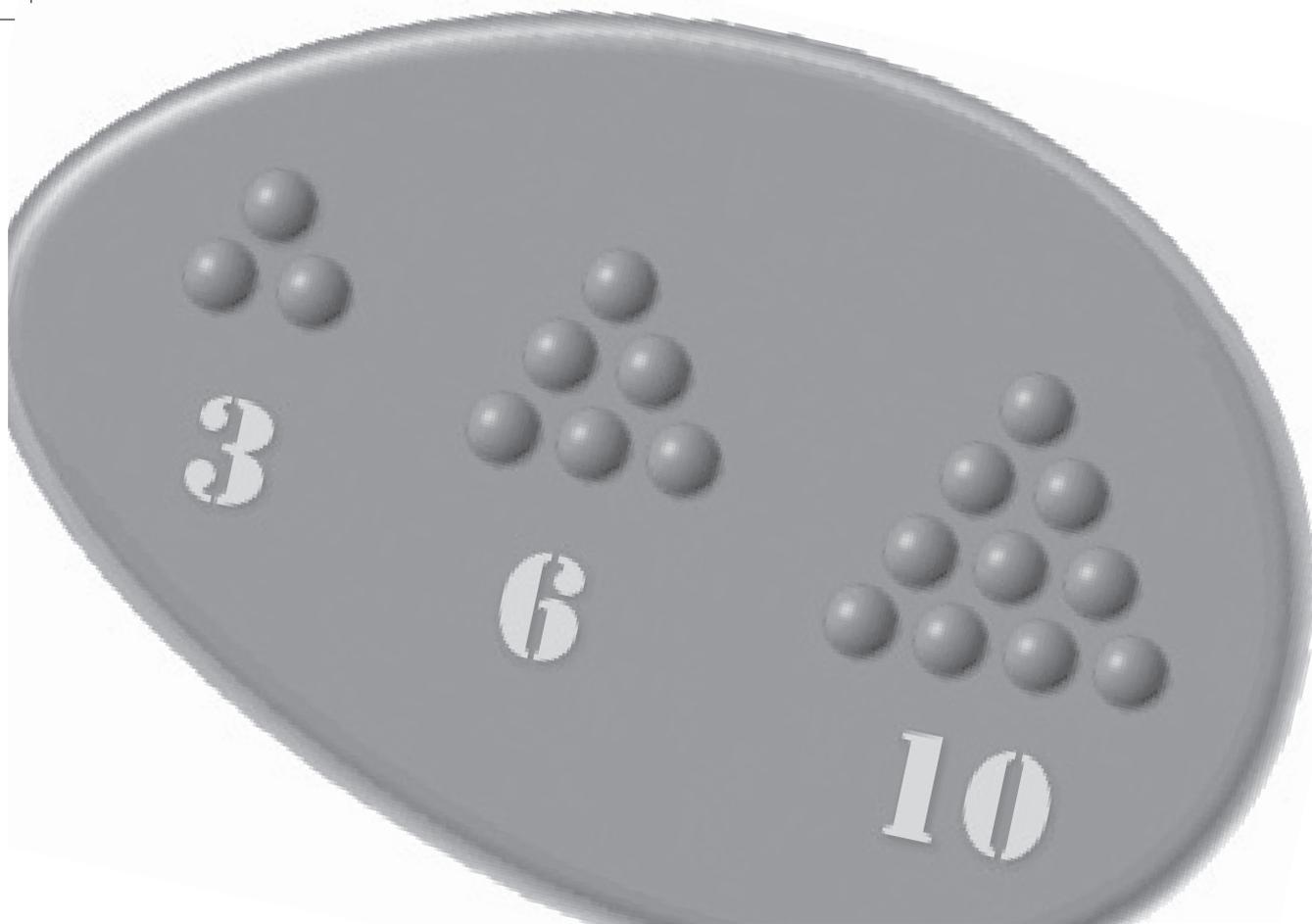
- \_\_\_\_\_ . Campaña Nacional de Capacitación Docente: Técnicas Activas de Aprendizaje, Módulos I, II y III. -- Asunción: MEC, 2015.
- \_\_\_\_\_ . Del currículum nacional al institucional / Ministerio de Educación y Cultura. -- Asunción: MEC, 2002.
- \_\_\_\_\_ . Diseño curricular nacional para la enseñanza media / Ministerio de Educación y Cultura. -- Asunción: MEC, 2000.
- \_\_\_\_\_ . La educación bilingüe en la reforma educativa paraguaya / Ministerio de Educación y Cultura. -- Asunción: MEC, [200-?].
- \_\_\_\_\_ . Matemática y sus tecnologías: programa de estudios para el 3.º curso de la educación media, plan común / Ministerio de Educación y Cultura. -- Asunción: MEC, 2004.
- \_\_\_\_\_ . PSC Proyecto Socio Comunitario = ñamopu'ã haguã ñane komunida: manual del alumno versión preliminar / Ministerio de Educación y Cultura. -- Asunción: MEC, 2005. -- 40 p.
- PIATTI DE VAZQUEZ, Lilia. Evaluación del aprendizaje: texto para docentes de Ciencias de la Educación y Formación docente / Lilia Piatti de Vazquez. -- 3.º ed. -- Asunción, 2001. -- 210 p.
- POZO, J. I. El aprendizaje estratégico / J. I. Pozo, C. Moreno. -- Madrid: Aula XXI, Santillana, 2000.
- RUIZ, A. Límite 2 / A. Ruiz. -- [s.l.]: Vicens Vives, 1999.
- SADOSKY, M. Elementos de cálculo diferencial e integral / M. Sadosky, R. C. de Guber. -- Buenos Aires: Alsina, 1975.
- SANTOS TRIGO, L. M. Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de la matemática / L. M. Santos Trigo. -- 2.º ed. -- México: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, 1999. -- (Didáctica- lecturas).
- SEGARRA, Lluís. Problematas: colección de problemas matemáticos para todas las edades / Lluís Segarra. -- Barcelona: Grao, 2001. -- (Didáctica de las Matemáticas, 156).
- STACEY, K. Resolver problemas: estrategias / K. Stacey, S. Groves. -- Madrid: Narcea, 2001.
- STERNBERG, R. J. Enseñar a pensar / R. J. Sternberg L. Spear- Swerling. -- Madrid: Aula XXI, Santillana, 2000.
- VIZMANOS BUELTA, José Ramón. Algoritmo 1 / José Ramón Vizmanos, M. Anzola. -- Madrid: SM, 1992.
- \_\_\_\_\_ . Matemática 4 / José Ramón Vizmanos, M. Anzola. -- Madrid: SM, 1995.
- \_\_\_\_\_ . Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales 1: Bachillerato humanidades y ciencias sociales / José Ramón Vizmanos Buelta, Máximo Anzola González. -- Madrid: SM, 1996.
- YUS RAMOS, Rafael. Temas transversales: hacia una nueva escuela / Rafael Yus Ramos. -- 2.º ed. -- Barcelona: Grao, 1998. -- 218 p. -- (Transversalidad, 106).



### Bibliografía de fuentes en línea

- Biografías y vida 2004. Waclaw Sierpinski [En línea], 2004. Disponible en: <http://www.biografiasyvidas.com/biografia/s/sierpinski.htm> [Consulta: 15 de setiembre de 2006].
- Calinger, R. Los matemáticos más famosos de todos los tiempos. Leonhard Euler [En línea]: Universidad Central de Venezuela. Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas, 2000. Disponible en: <http://euler.ciens.ucv.ve/maticos/euler.html> [Consulta: 7 de setiembre de 2006]
- George Pólya [En línea]: Wikipedia la enciclopedia libre, 2006. Disponible en: [http://es.wikipedia.org/wiki/George\\_P%C3%B3lya.htm](http://es.wikipedia.org/wiki/George_P%C3%B3lya.htm) [Consulta: 15 de setiembre de 2006]
- Guillaume de l'Hôpital [En línea]: Wikipedia la enciclopedia libre, 2006. Disponible en: [http://es.wikipedia.org/wiki/Guillaume\\_Francois\\_Antoine\\_l'H%C3%B4pital](http://es.wikipedia.org/wiki/Guillaume_Francois_Antoine_l'H%C3%B4pital) [Consulta: 19 de setiembre de 2006].
- Henderson, Janice. Los matemáticos más famosos de todos los tiempos. Arquímedes [En línea]: Universidad Central de Venezuela. Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas, 2004. Disponible en: <http://euler.ciens.ucv.ve/maticos/archimedes.html> [Consulta: 7 de setiembre de 2006].
- Johan Friedrich Gauss [En línea]: Wikipedia la enciclopedia libre, 2006. Disponible en: [http://es.wikipedia.org/wiki/Carl\\_Friedrich\\_Gauss](http://es.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss) [Consulta: 15 de setiembre de 2006].
- Leonardo Fibonacci [En línea]: Portal Fuenterebollo, 2006. Disponible en: <http://www.fuenterrebollo.com/mercado/fibonacci-biografia.htm> [Consulta: 15 de setiembre de 2006]
- Los matemáticos y su historia. Daniel Bernoulli [En línea]... Universidad de Santiago de Chile. Disponible en: <http://www.mat.usach.cl/histmat/html/ber1.html> [Consulta: 20 de setiembre de 2006].

Impresión - 2016  
Asunción Paraguay



# Matemática

**3°**  
Educación Media  
Plan Común

Curso

Guía didáctica  
para docente