2.3 UNIDAD 3

Cónicas

2.3.1. Capacidades

- Resuelve situaciones problemáticas en las que intervengan secciones cónicas.

2.3.2. Temas

Secciones cónicas y lugares geométricos.

Circunferencia: ecuación, centro en el origen y fuera de él, radio, representación gráfica. Intersección con una recta.

Parábola: ecuación, vértice en el origen y fuera de él, foco, lado recto, directriz, representación gráfica. Intersección con una recta.

Elipse: ecuación, vértices, focos, excentricidad, centro en el origen, representación gráfica. Intersección con una recta.

2.3.3. Página de apertura

Como actividad inicial proponemos la lectura y un breve comentario sobre un dibujo de Leonardo Da Vinci que vincula a la circunferencia con el cuerpo humano.

2.3.4. Abordaje de los temas

En la Geometría Euclidiana estudiamos la circunferencia, cuyos elementos necesarios para su trazado son su centro y su radio; en la Geometría Analítica estudiamos esta curva en el plano cartesiano.

Para determinar la ecuación de la circunferencia, utilizamos el concepto de distancia entre dos puntos, que son el centro de la circunferencia y un punto de ella.

Es importante resolver las actividades propuestas en el texto y graficar cada situación. El estudiante podrá distinguir así las distintas posiciones de la circunferencia, a través de sus ecuaciones.

Para hallar la ecuación de una recta tangente a la circunferencia, es importante que el estudiante identifique el punto de tangencia, la condición de perpendicularidad entre el radio y la recta tangente.

Para determinar los puntos de intersección de una recta y una circunferencia, hacer ver al alumno o alumna que estamos en presencia de un sistema de ecuaciones cuadráticas y que resolviendo el mismo por el método de determinantes, se obtienen los puntos de intersección. Para el docente es la oportunidad de englobar ambos temas y desarrollarlos de una sola vez.

Las Actividades de fijación y retroalimentación propuestas permiten al alumno y a la alumna interpretar y verificar analítica y gráficamente los resultados obtenidos, que posibilita el logro de las capacidades establecidas en la unidad.

Sugerimos que las actividades de autoevaluación propuestas sirvan como trabajo práctico y sean evaluadas posteriormente por el docente.

2.3.5. Algunos indicadores de evaluación

- Indica los elementos de la circunferencia en un gráfico.
- Halla la ecuación de una circunferencia a partir de elementos dados.
- Traza el gráfico de la circunferencia con el compás.
- Calcula el centro y radio de una circunferencia conociendo su ecuación general.
- Determina la ecuación general de la circunferencia a partir de las coordenadas de su centro y su radio.
- Halla el punto de intersección de la recta con la circunferencia.
- Determina la ecuación de la recta tangente a la circunferencia.
- Reconoce la importancia de interpretar información a partir de la representación gráfica de la circunferencia.
- Utiliza diferentes estrategias de resolución.

2.3.6. Actividades complementarias

Para un trabajo grupal, presentamos las siguientes actividades.

A 1 Propuesta de actividad

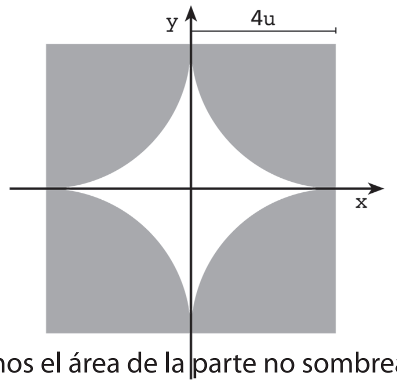
TEMA Circunferencia. Elementos. Ecuaciones.

OBJETIVO Determino la ecuación de la circunferencia, en situaciones dadas.

Trazo la gráfica de la circunferencia en el plano cartesiano a partir de su centro y radio utilizando compás.

DESARROLLO Partimos de la siguiente situación problemática:

Dado el siguiente gráfico que representa un mosaico:



1 Hallamos el área de la parte no sombreada.
2 Escribimos las coordenadas de los vértices del cuadrado.
3 Completamos las circunferencias de cada cuadrante.
4 Determinamos la ecuación de cada circunferencia trazada.

Solucionamos

1. Hallamos el área del cuadrado: $A = (8u)^2 = 64u^2$

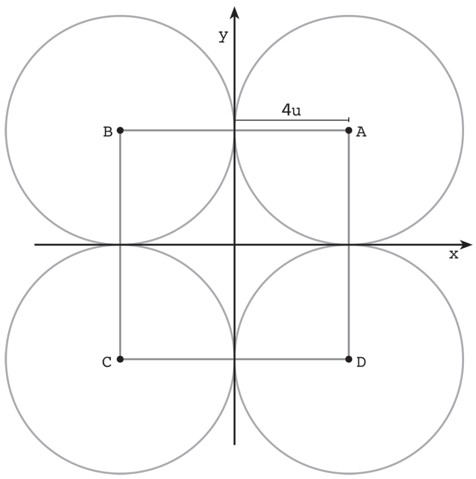
Luego el área de la circunferencia formada por la partes sombreadas: $A = \pi r^2 = 16\pi u^2$

El área de la parte no sombreada es: $64 - 16\pi = 16\,(4 - \pi)\ u^2$

2. Las coordenadas de cada vértice son:

   A. (4, 4); B. (– 4, 4);
   C. (– 4, – 4) D. (4, – 4)

3. Completamos el trazado



4. Conociendo el centro y el radio de cada una de las circunferencias, podemos escribir sus ecuaciones:

   Para C (4, 4) y radio r = 4 $\longrightarrow$ $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 16$
   Para C (– 4, 4) y r = 4 $\longrightarrow$ $(x+4)^2 + (y-4)^2 = 16$
   Para C (– 4 , – 4) y r = 4 $\longrightarrow$ $(x+4)^2 + (y+4)^2 = 16$
   Para C (4, – 4) y radio r = 4 $\longrightarrow$ $(x-4)^2 + (y+4)^2 = 16$

Esta actividad se puede ampliar pidiendo a la clase que planteen otras situaciones similares, utilizando otros mosaicos creados por ellos mismos.

A 2 Propuesta de actividad

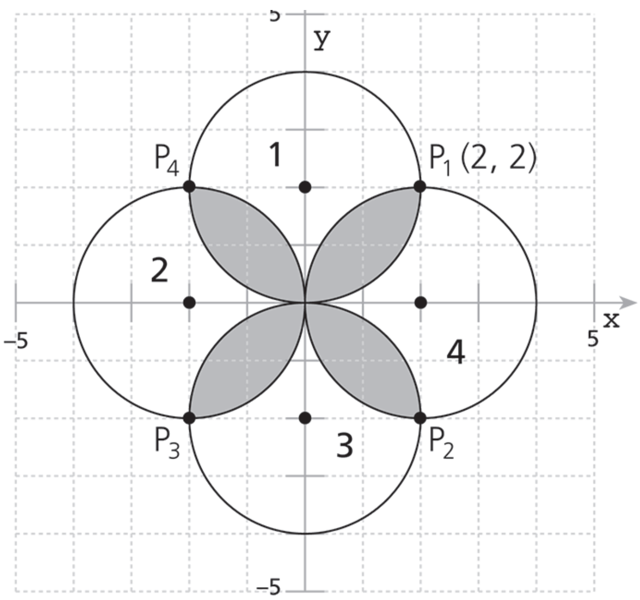
TEMA Circunferencia. Ecuación canónica y general. Intersecciones.

OBJETIVO Analizo las ecuaciones canónica de circunferencias dadas.

Hallo la ecuación general y el punto de intersección entre las circunferencias.

DESARROLLO Dadas las ecuaciones canónicas graficamos las siguientes circunferencias:

1. $(x-0)^2 + (y-2)^2 = 4$
2. $(x+2)^2 + (y-0)^2 = 4$
3. $(x-0)^2 + (y+2)^2 = 4$
4. $(x-2)^2 + (y-0)^2 = 4$



Actividad 1

Analizo las ecuaciones.

1. $(x-0)^2+(y-2)^2=4$ — $C(h,k) = (0,2);\ R=2$
2. $(x+2)^2+(y-0)^2=4$ — $C(-2,0);\ R=2$
3. $(x-0)^2+(y+2)^2=4$ — $C(0,-2);\ R=2$
4. $(x-2)^2+(y-0)^2=4$ — $C(2,0);\ R=2$

Actividad 2

Escribo las ecuaciones generales ($x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$)

1. $(x-0)^2+(y-2)^2=4$

   $x^2+y^2-4y+\cancel{4}-\cancel{4}=0$

   $x^2+y^2-4y=0$ ecuación general

2. $(x+2)^2+(y-0)^2=4$

   $x^2+4x+\cancel{4}+y^2-\cancel{4}=0$

   $x^2+y^2-4x=0$ ecuación general

3. $(x-0)^2+(y+2)^2=4$

   $x^2+y^2-4y+\cancel{4}-\cancel{4}=0$

   $x^2+y^2-4y=0$ ecuación general

4. $(x-2)^2+(y-0)^2=4$

   $x^2+4x+4+y^2-4=0$

   $x^2+y^2-4x=0$ ecuación general

Actividad 3

Intersectamos la 1 con la 4 y hallamos P_1; de la siguiente manera:

1. $x^2+y^2-4y=0$
4. $x^2+y^2-4x=0$

$x^2+y^2=4y$
$x^2+y^2=4x$
Como los primeros miembros son iguales, los segundos también serán iguales.

$4y=4x \ldots (\div 4)$

$\boxed{y=x}$ Se lleva en — $x^2+(x^2)-4(x)=0$

$x^2+x^2-4x=0$

$2x^2-4x=0$

$2x(x-2)=0$

$x_1=0 \quad x_2=2$

Los dos valores reemplazo en $y=x$

$(0,0)\ (2,2)$

Son los puntos de intersección de la 1 con la 4.

A 3 Propuesta de actividad

TEMA Construcción de circunferencias concéntricas.

OBJETIVO Construyo circunferencias utilizando la técnica del hilorama.

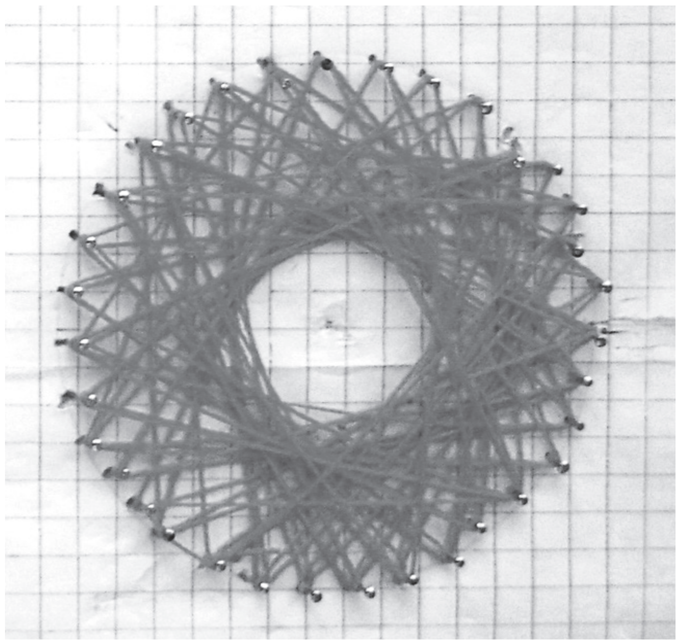
Utilizo conceptos matemáticos en la construcción de circunferencias.

Determino las ecuaciones de las circunferencias obtenidas.

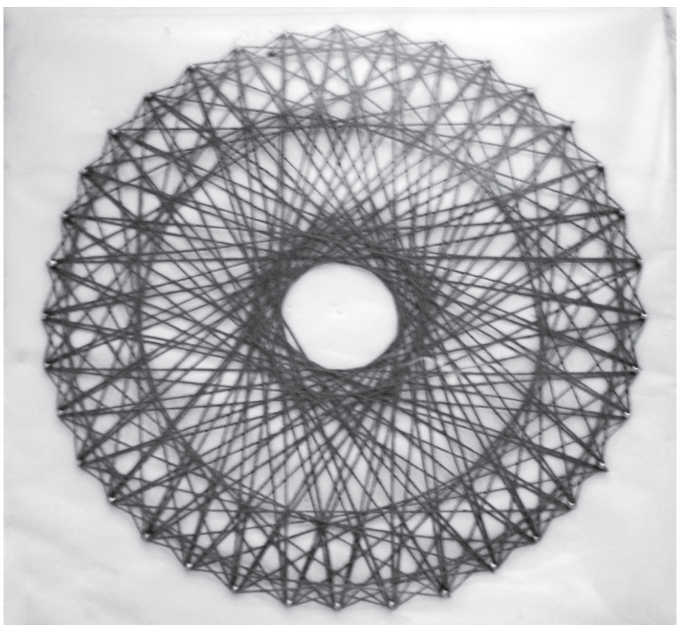
Escribo las ecuaciones de los diámetros centrales.

MATERIALES *Isopor*, alfileres, hilos de bordar, tijera

DESARROLLO



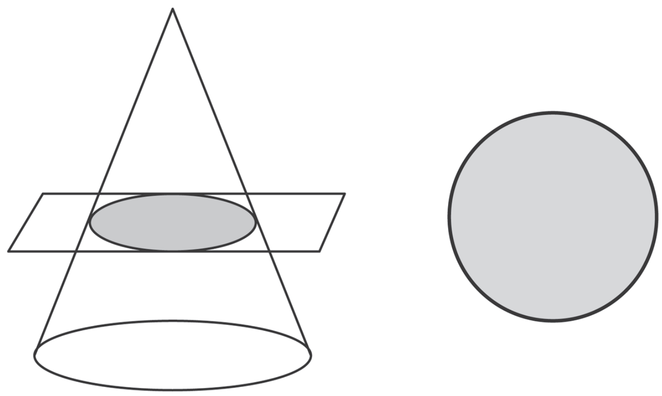
- Preparamos el material cortando en forma cuadrangular o rectangular el *isopor*.
- Trazamos con el compás una circunferencia con un radio cualquiera (en este caso 3,5 cm).
- Colocamos los alfileres alrededor de la circunferencia a una misma distancia uno de otro con ayuda del transportador.
- Atamos el hilo por 1 alfiler para empezar a unir 3 alfileres formando triángulos uno seguido del otro alrededor de toda la circunferencia; notándose en la región central una circunferencia concéntrica de menor radio que la trazada inicialmente, como se observa en la fotografía de la izquierda.
- Medimos el radio de ambas circunferencias.
- Escribimos las ecuaciones de las circunferencias concéntricas, $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 3{,}5^2$.
- Los diámetros centrales tienen como ecuación $y = 0$ (eje de las abscisas) y $x = 0$ (eje de ordenadas).
- Sugerimos a la clase la aplicación de esta técnica creando otros hiloramas, como el de la fotografia de abajo.



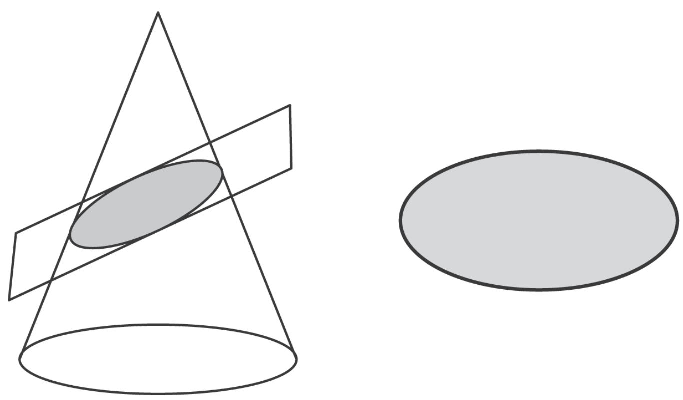
2.3.7. Abordaje de los temas

Las cónicas son curvas que surgen al cortar un cono de revolución por un plano. El corte depende de la inclinación del plano respecto del eje del cono para obtener la parábola, la elipse, la circunferencia y la hipérbola. Esto se puede realizar experimentalmente:

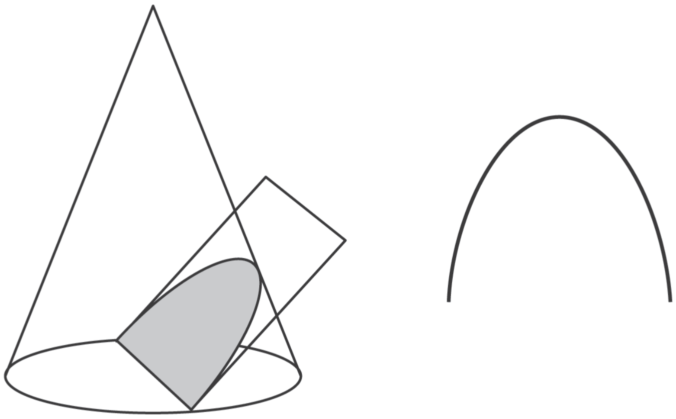
1. Modelamos un cono utilizando arcilla, plastilina u otro material. Luego utilizamos una lámina fina cortante (cúter de hoja ancha) seccionamos el cono de las siguientes maneras:
   a. Si el plano es perpendicular al eje se obtiene una **circunferencia**



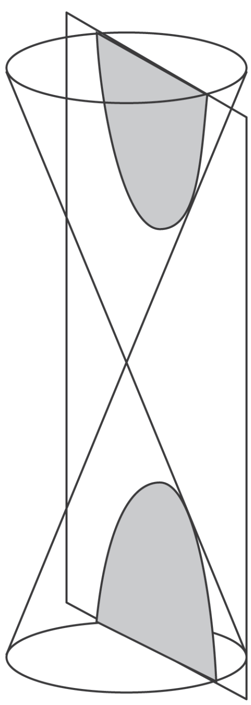
   b. Si inclinamos el plano cortante de tal forma que corte a toda la superficie cónica, la intersección es una curva cerrada ovalada, llamada **elipse**.



c. Si inclinamos más el plano cortante de forma que quede paralelo a la generatriz del cono, entonces la intersección es una línea curva abierta llamada **parábola.**



d. En el siguiente experimento construimos dos conos como muestra la figura. Si el plano es paralelo a las dos generatrices la intersección son dos curvas abiertas una arriba y otra abajo, resulta así una **hipérbola.**



Una vez concluido el experimento realizamos la siguiente actividad:

Pareamos las curvas según el experimento realizado.

a. elipse ( ) La intersección es una curva abierta.

b. hipérbola ( ) Cuando el plano de intersección es perpendicular al eje.

c. circunferencia ( ) Cuando la intersección es una curva ovalada.

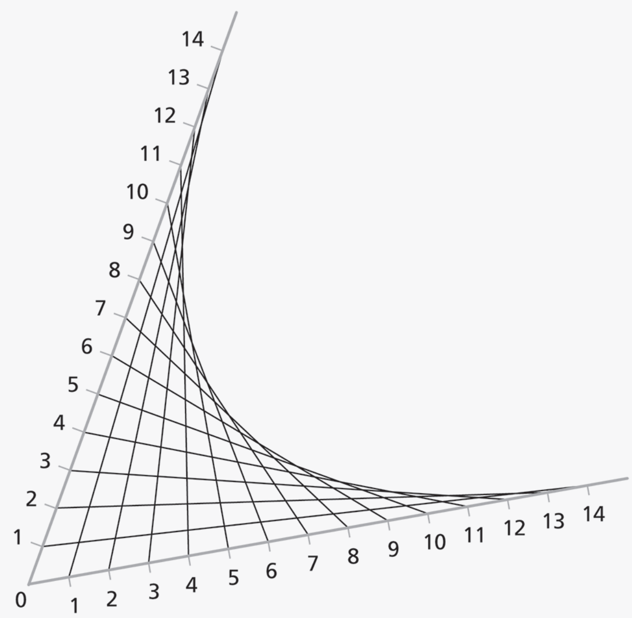
d. parábola ( ) Si el plano es paralelo a las dos generatrices.

Concluimos que según el corte que le damos al cono obtenemos las curvas llamadas cónicas.

Parábola

Una estrategia para la mejor comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico, sería la construcción gráfica de la misma y a partir de esta estudiar sus elementos. En el texto proponemos construir la parábola utilizando regla y compás.

Aquí sugerimos un método sencillo, conocido como «método del sastre»:



- Dibujamos un ángulo cualquiera tomamos divisiones iguales en cada uno de los lados y enumeramos empezando en ambos casos por el vértice. En este ejemplo del 0 al 14 en ambos lados
- Unimos los puntos cuyos valores suman, en este caso 15. Por ejemplo 1 y 14, 2 y 13, y así sucesivamente hasta completar todas las combinaciones.
- Obtenemos la curva de la parábola como observamos en el gráfico.

Es conveniente que el estudiante, junto con el profesor, deduzcan la ecuación de la parábola con vértice en el origen, de aquellos casos que no fueron demostrados en el texto. Esto forma parte del proceso de construcción de su conocimiento matemático en un marco de trabajo cooperativo.

Utilización del recurso tecnológico en la construcción de la parábola.

Como recurso tecnológico proponemos la computadora para graficar la parábola $y = ax^2$, analizar la variación de las funciones e interpretar gráficos. A continuación, explicamos el procedimiento:

1 En la hoja de cálculo en la columna A se especifican los valores dados a «X»; en la columna B para a = 1, la función es $y = x^2$, los valores de «Y» se obtienen insertando sucesivamente en la columna B las fórmulas, por ejemplo en la celda (3,B) = 1*A3^2.

2 En la columna C, para a = 2, la función es $y = 2x^2$, los valores de «Y» se obtienen insertando sucesivamente en la columna C las fórmulas, por ejemplo en la celda (3,C) =2*A3^2.

3 Para las columnas siguientes se procede de la misma manera.

4 Se seleccionan las columnas A, B, C, D, E y F para insertar un gráfico de dispersión con puntos de datos conectados por líneas. Al finalizar se obtiene la gráfica de 5 parábolas.

Para ampliar el estudio sugerimos proponer a la clase que realice la misma actividad para la función $y = -ax^2$.

Elipse

Iniciamos el tema con la construcción de la elipse por el «método del jardinero», cuya aplicación permite al estudiante una mejor comprensión de la curva en estudio.

Una vez construida la elipse se estudian sus elementos. La relación entre el eje mayor, eje menor y distancia focal se deduce utilizando el Teorema de Pitágoras.

Proponemos también la construcción de la elipse con regla y compás.

Es importante deducir las ecuaciones de la elipse con centro en el origen de coordenadas cuando sus focos se encuentran sobre el eje de las abscisas y sobre el eje de ordenadas.

Recomendamos la solución de los problemas propuestos donde el estudiante podrá visualizar la aplicación del estudio de esta cónica en situaciones reales.

Se propone una **investigación bibliográfica** sobre los cuerpos celestes que forman nuestro Sistema Solar Planetario, visitando el CRA.

Los problemas resueltos y los propuestos referidos a la Astronomía permiten trabajar contenidos de Ciencias Naturales y Salud.

2.3.8. Algunos indicadores de evaluación

- Identifica los elementos de una parábola (o elipse).
- Halla la ecuación de una parábola (o elipse) a partir de elementos dados.
- Traza el gráfico de la parábola (o elipse) a partir de su ecuación.
- Calcula los elementos de la parábola (o elipse) conociendo su ecuación.
- Interpreta el gráfico construido de la parábola (o elipse).
- Reconoce la importancia de interpretar información a partir de la representación gráfica de la parábola (o elipse).
- Utiliza la computadora en el análisis de la variación de una función $y = ax^2$
- Demuestra interés en el trabajo de clase.

2.3.9. Actividades complementarias

A 4 Propuesta de actividad

TEMA Elipse. Aplicación en problemas.

OBJETIVO Resuelvo problemas aplicando el concepto de elipse.

DESARROLLO Presentamos las siguientes situaciones problemáticas:

- Una lata de sardina de forma elíptica tiene las siguientes dimensiones:
  - Eje mayor: $2a = 10$ cm
  - Eje menor: $2b = 6$ cm

1. Determinamos la distancia focal y su excentricidad
2. Escribimos la ecuación de la elipse
3. Graficamos la elipse
4. Investigo otro objeto de forma elíptica, tomo sus medidas y formulo un problema similar al anterior

Solucionamos

1. $2a = 10$ cm $\quad a = 5$ cm

   $2b = 6$ cm $\quad b = 3$ cm

   Aplicando Pitágoras calculamos la semidistancia focal

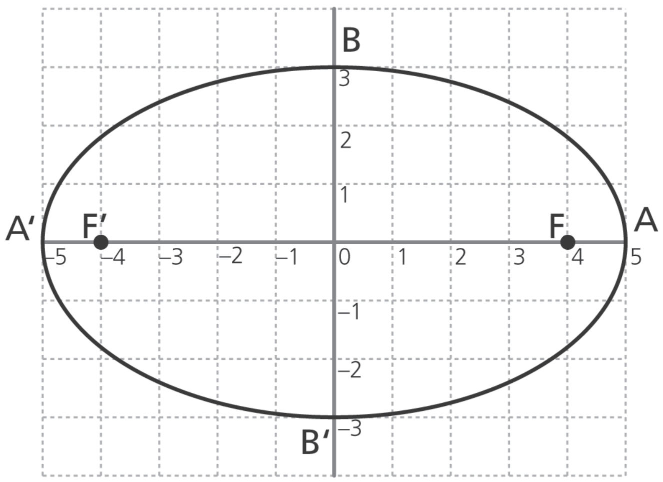
   $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16 \qquad c = 4$ cm

2. Escribimos la ecuación de la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

3. Graficamos

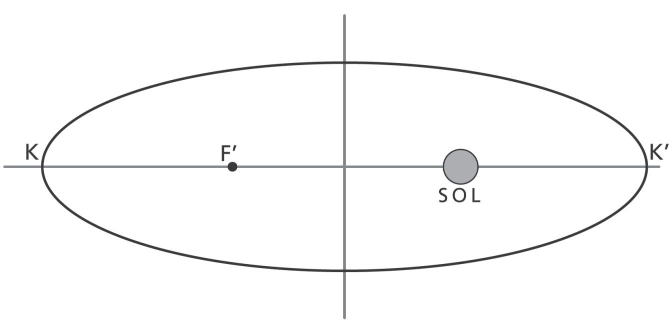


El punto 4 se puede proponer como un trabajo individual. El alumno o alumna busque un objeto de forma elíptica, tomen las medidas de sus ejes mayor y menor y a partir de estas determinen la distancia focal, su excentricidad y escriba la ecuación de la curva.

- La órbita de los cometas periódicos es una elipse con el sol situado en uno de los focos. La máxima distancia del cometa Kohoutec al Sol es de 800 millones de kilómetros y la mínima de 266 millones de kilómetros.

1. Hallamos el semieje mayor y la distancia focal.
2. Calculamos la excentricidad de la órbita del cometa Kohoutec.

Solución: • Modelizamos



1. Sumando las distancias máximas y mínimas del cometa al Sol, obtenemos la medida del eje mayor de la elipse:

$2a = 800 . 106 + 266 . 10^6 = 1\,066 . 10^6$ km

$a = 533 . 106$ km semieje mayor

Restando del semieje mayor la mínima distancia del cometa al sol obtenemos su semidistancia focal:

$c = 533 . 10^6 – 266 . 10^6 = 267 . 10^6$ km

$2c = 534 . 10^6$ km distancia focal

2. Calculamos su excentricidad:

$e = \frac{c}{a} = 267 . 10^6 : 533 . 10^6 = 0,5$ excentricidad

- El semieje mayor es de 533.10^6 km; la distancia focal es de 537.10^6 km y su excentricidad es 0,5.

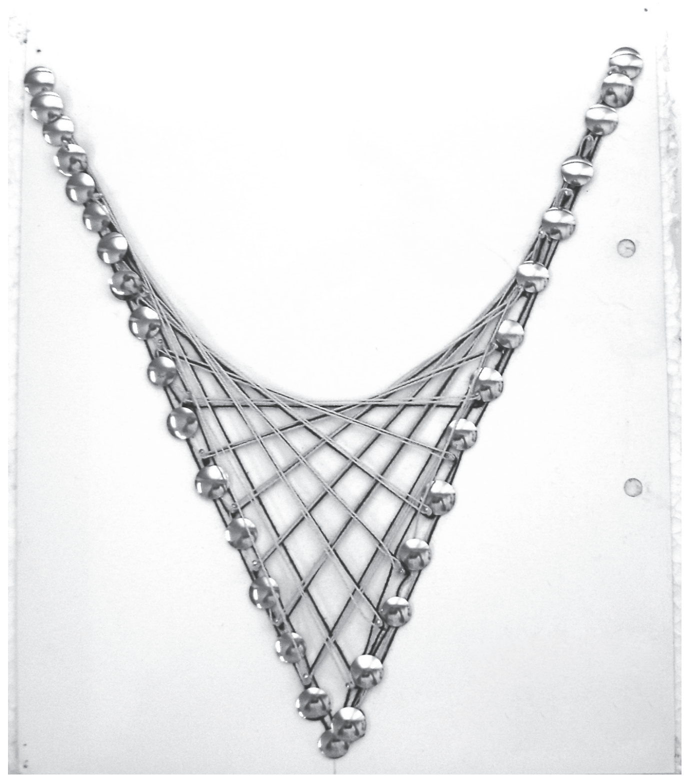
A 5 Propuesta de actividad

TEMA Construcción de la parábola.

OBJETIVO Construyo la parábola utilizando el método del sastre y del hilorama.

MATERIALES *Isopor*, papel cuadriculado, regla, hilos de bordar, tijera, alfileres.

DESARROLLO



- Preparamos un pedazo de *isopor* forrado con papel cuadriculado.
- Trazamos en el pedazo de *isopor* forrado un ángulo cualquiera con la regla y los lados numeramos del 0 hasta el número 13; en esos puntos colocamos los alfileres para luego unir los puntos cuyos valores sumen 14.
- Unimos los extremos con el hilo de bordar, por ejemplo: el 1 con el 13, el 2 con el 12, el 3 con el 11 y así sucesivamente; esto realizamos en forma envolvente de manera que al terminar de unir los puntos aparece la curva parabólica, como se muestra en la fotografía de la izquierda.
- Sugerimos a la clase crear otros diseños como el de la fotografía de la derecha, utilizando la técnica del hilorama.