2.3

UNIDAD 3

Funciones trigonométricas

2.3.1. Capacidades

- Formula y resuelve problemas referidos a situaciones de la vida real, en los que se utilicen funciones trigonométricas y/o relaciones entre las mismas en el triángulo rectángulo.
- Formula y resuelve problemas que involucren la utilización de triángulos oblicuángulos.

2.3.2. Temas

- Valores de las funciones trigonométricas de ángulos notables.
- Signos de las funciones trigonométricas en la reducción de ángulos al primer cuadrante.
- Teorema del seno.
- Teorema del coseno.

2.3.3. Página de apertura

En esta unidad se presenta una información histórica sobre cómo la Matemática comenzó a desarrollarse en forma organizada alrededor del siglo IV a.C. Sugerimos a partir de esta información, investigar más en la biblioteca o Internet sobre el proceso de desarrollo de esta ciencia, dándole un tiempo preferencial, pues la historia proporciona una visión diferente al enfoque de la Matemática convencional y permite verla en su verdadera perspectiva.

2.3.4. Abordaje de los temas

Se sugiere comenzar la unidad con el estudio de los números reales, partiendo del cálculo de perímetros y áreas donde se visualiza el uso de los números racionales e irracionales, con el propósito de que los estudiantes comprendan la importancia del tema y su aplicación práctica en otras ramas de la Matemática como la Geometría y la Trigonometría.

Antes de iniciar el estudio de la Trigonometría proponemos la realización de actividades de retroalimentación sobre el tema Radicales.

Presentamos en forma breve y sencilla la fundamentación teórica, utilizando los recursos gráficos para introducir y desarrollar los contenidos, permitiendo así justificar el porqué de cada regla o fórmula.

El tema funciones trigonométricas en el triángulo rectángulo desarrollamos a través de una situación problemática. Analizando la misma determinamos la semejanza de los triángulos rectángulos trazados con relación a un ángulo agudo, escribimos la proporcionalidad de los lados y deducimos el concepto de funciones trigonométricas de un ángulo: seno, coseno, tangente y sus respectivas cofunciones, cotangente, secante y cosecante.

La resolución de triángulos está planteada en el texto en una gran cantidad de ejercicios y problemas de diferentes tipos y se desarrollan siguiendo un proceso claro y explicativo de cada paso que se da.

Material didáctico sugerido

Para la medición de ángulos de elevación sugerimos la construcción y utilización de un instrumento denominado astrolabio.

Antiguamente el astrolabio era utilizado para observar la altura de los astros, construiremos uno muy parecido.

Materiales necesarios

- Cartulina de 30 x 30 cm.
- Un tubo delgado de 30 cm de largo que puede ser de cartulina, cartón o plástico.
- Un hilo de ferretería o un cordón.
- Transportador de 180º.
- Plastilina.

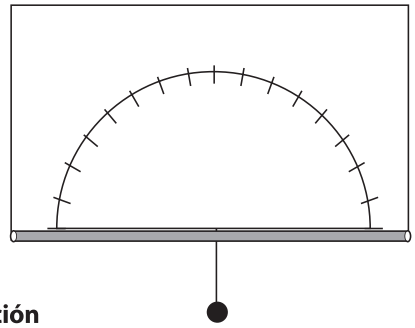
Construcción

Marcamos sobre la cartulina una línea a 1 cm del borde y señalamos el punto medio (a los 15 cm).

Colocamos el transportador sobre la línea trazada haciendo coincidir el centro del mismo con el punto medio. Los ángulos 0º y 180º deben quedar sobre la línea. Dibujamos el transportador en la cartulina marcando todos los ángulos.

Atamos el hilo o cordón en el punto medio del tubo y lo pegamos a la cartulina por debajo de la línea, de manera que el centro del transportador coincida con la mitad del mismo.

En el extremo del hilo o cordón atamos una pelotita de plastilina.

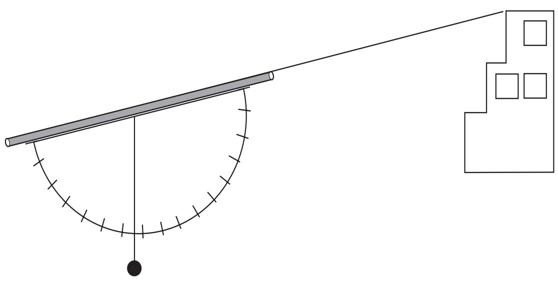


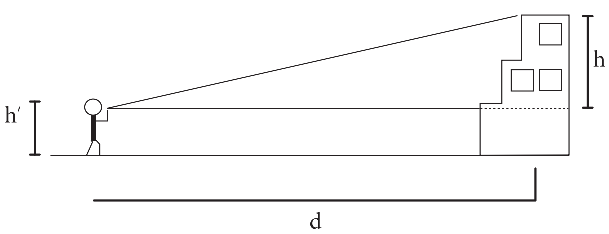
Utilización

Seleccionamos el objeto como un edificio, un árbol, una columna, etc. cuya altura queremos medir. Para ello nos ubicamos a una determinada distancia del objeto y mirando a través del tubo enfocamos el astrolabio a la punta del objeto. En ese momento el hilo o cordón con la pelotita de plastilina se moverá y marcará un ángulo en el transportador. Anotamos el valor de ese ángulo y medimos la distancia (d) a la que estamos del objeto, con estos datos podemos calcular la altura (h) del objeto utilizando

la función trigonométrica: $\operatorname{tg} \theta = \frac{h}{d}$

Para hallar la altura real del objeto debemos sumar la altura de la persona que observa al valor h obtenido





En esta unidad los estudiantes deben formular y resolver problemas sobre el tema: Resolución de triángulo rectángulo.

La utilización del astrolabio puede emplearse para trabajar la capacidad «formula problemas», pues los alumnos y las alumnas podrán tomar los datos y luego elaborar el enunciado del problema.

Una propuesta para trabajar la capacidad

«Formular problemas que involucren el empleo de funciones y/o relaciones entre funciones trigonométricas»

1. Utilizar la técnica «lluvia de ideas» para hacer un listado en qué circunstancias o cuándo se presentan en la vida real «triángulos rectángulos».
2. Recordar con los alumnos y alumnas las nociones básicas como: ¿Qué es un triángulo rectángulo? ¿Cuáles son sus características? ¿Qué relación hay entre los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo?
3. Proponerles elegir la situación que plantear, determinar los datos y la incógnita, para luego formular el problema.
4. Analizar el problema formulado para ver si la información que proporciona es relevante, si contiene todos los datos necesarios, investigar los que faltan, desechar los que están de más; asimismo ver si la pregunta formulada es pertinente.

Presentamos las funciones trigonométricas en el sistema de coordenadas cartesianas y ejemplificamos el cálculo de las funciones trigonométricas de un ángulo agudo, graficamos y determinamos sus signos según el cuadrante en que se encuentran.

Por último, trabajamos la circunferencia trigonométrica.

Proponemos la realización de investigación bibliográfica con estas actividades:

- Averiguamos en textos del CRA qué efectos causa en las personas vivir bajo el tendido de cables de alta tensión.
- Averiguamos en diferentes fuentes en qué cerros de nuestro país se encuentran imágenes, monumentos o capillas.

Consideramos oportuna una retroalimentación de lo desarrollado hasta este punto, la misma puede darse completando una ficha de trabajo en forma individual o grupal. También se podrían utilizar las «Actividades de retroalimentación» propuestas.

2.3.5. Algunos indicadores de evaluación

- Calcula la función seno (o coseno o tangente) de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo
- Halla la función seno (o coseno o tangente) de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo cuyos lados se expresan con radicales
- Determina los datos necesarios para formular un problema que involucra el empleo de la función seno (u otra función).
- Establece la incógnita para formular un problema que involucra el empleo de la función seno (u otra función).
- Elabora el enunciado de la situación problemática que involucra el empleo de la función seno (u otra función).
- Examina el problema formulado para comprobar si la información es relevante.
- Halla la solución de la situación planteada.
- Verifica el resultado obtenido.
- Calcula las funciones trigonométricas conociendo el valor de una de ellas y el cuadrante al que pertenece el ángulo.

- Respeta normas de una convivencia democrática en actividades realizadas en el aula.

2.3.6. Actividades complementarias

En este apartado sugerimos algunas actividades, además de las propuestas en el texto.

A 1 Propuesta de actividad

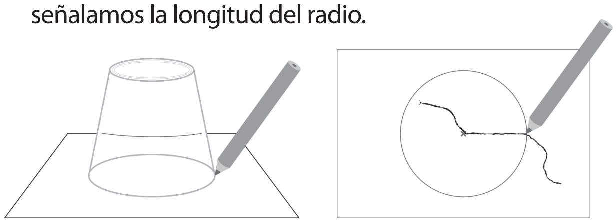
TEMA Sistema circular o radián.

OBJETIVO Adquiero el concepto de radián.

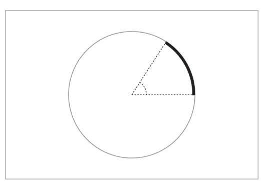
DESARROLLO La enseñanza de la unidad de amplitud de ángulo «radián», se puede presentar con un modelo similar al presentado más abajo.

Materiales que vamos a utilizar: papel, lápiz, hilo de lana, compás, vaso. Con dichos materiales solicitamos a los estudiantes que realicen las siguientes actividades:

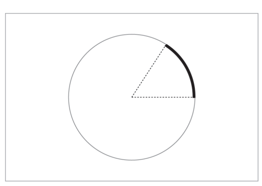
- Con el vaso dibujamos sobre un papel una circunferencia. Retiramos el vaso, marcamos su centro y sobre un hilo señalamos la longitud del radio.



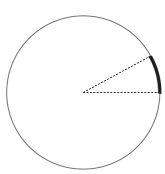
- Sobre la circunferencia llevamos la medida del radio obtenido con el hilo. A esta medida llamamos «radián».



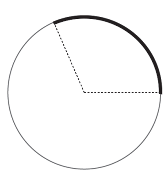
- Trazamos los radios correspondientes a los extremos del arco y obtenemos un ángulo aproximadamente de 57º.



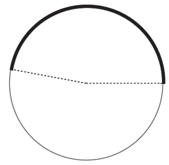
- Repetimos la experiencia para 1/2 rad, 2 rad, 3 rad y 6 rad.



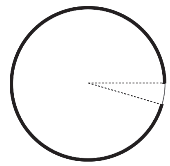
$\frac{1}{2}$ rad ≅ 28°39′44″



2 rad ≅ 114°38′59″



3 rad ≅ 171°58′29″



6 rad ≅ 343°56′56″

Esta experiencia nos permite visualizar mejor la relación entre el sistema radián y el sexagesimal.

A 2 Propuesta de actividad

Presentamos una actividad para realizar en una hoja de cálculo

TEMA Crecimiento y decrecimiento de la función y = sen x.

OBJETIVO Analizo el comportamiento de la función seno en los cuatro cuadrantes.

DESARROLLO Para representar gráficamente la función y = sen x en la computadora seguimos estos pasos:

PRIMERO:

Construimos y copiamos la siguiente tabla en una hoja de cálculo.

	A	B	C
1	X (en sexagesimal)	X (en radianes)	Y
2	0	= A2*PI()/ 180	= seno (B2)
3	90	= A3*PI()/ 180	= seno (B3)
4	180	= A4*PI()/ 180	= seno (B4)

Observación:

PI() es una función que devuelve el valor de p con 15 dígitos, se encuentra en la categoría «Matemáticas y trigonométricas». También seno() es una función de esta categoría, en la que pide el número que es el ángulo convertido en radianes que se observa en cada celda de la columna B.

Es necesario ocultar la columna B, luego de realizar los cálculos de X (en radianes) para graficar solamente los valores de X (en sexagesimal) e Y de la función y = sen x.

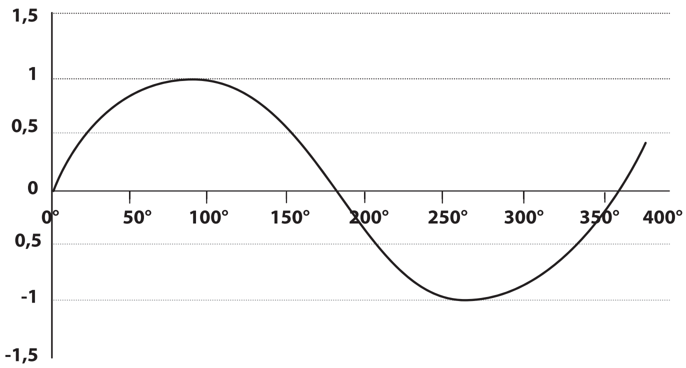
Atendiendo la facilidad para la obtención de los valores en la tabla se sugiere considerar los ángulos desde 0º hasta 360º.

SEGUNDO:

Seleccionamos de la tabla anterior las columnas A y C, ocultando previamente la columna B y luego insertamos un gráfico de dispersión de la siguiente manera:

- Hacemos clic en Insertar en la barra de menú y en Gráfico.
- Seleccionamos el tipo y subtipo de gráfico (dispersión-con líneas suavizadas y sin marcadores de datos).
- Finalizamos.

La gráfica en la pantalla será similar a la siguiente:



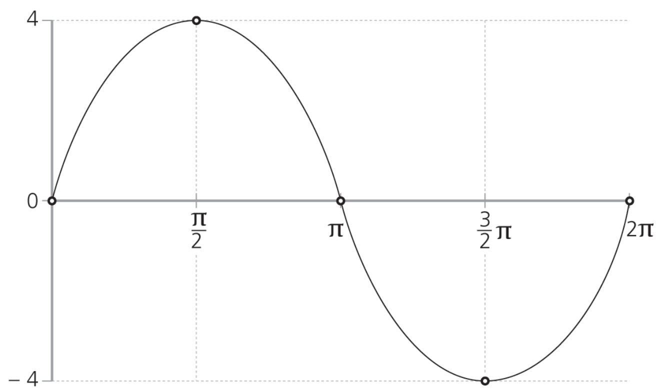
Hallamos la amplitud y el período: Amplitud = 1 Período = 2π

Proponemos a la clase que transforme la función dada y = sen x en otra y compare con la misma, para ello se puede agregar a la función una constante.

Por ejemplo: y = sen 4 x

Para representar gráficamente y = sen 4 x seguimos los mismos pasos mencionados anteriormente.

La gráfica de esta función será similar a la siguiente:



Al comparar realizamos las siguientes preguntas:

¿En qué puntos corta al eje de abscisa?

¿Cuáles son los puntos máximos y mínimos? Expresamos los mismos en forma de coordenadas.

2.3.7. Abordaje de los temas

Continuamos con el estudio de la variación de las funciones trigonométricas, utilizando recursos gráficos, lo que permitirá a los estudiantes visualizar el comportamiento de las funciones, sus valores máximos y mínimos y la variación de sus valores en los diferentes cuadrantes.

Sugerimos que al término del análisis de las funciones, los estudiantes realicen un resumen de los valores que puede tomar cada función trigonométrica.

Planteamos varias situaciones de reducción de un ángulo al primer cuadrante, para luego calcular las funciones de dicho ángulo y determinar sus signos.

Las actividades propuestas bajo el título Actividades de fijación tienen por objeto intensificar las capacidades desarrolladas.

Es importante justificar el uso de reglas y fórmulas demostrando las mismas y no la simple aplicación de ellas. Esto podemos ver en todos los temas trabajados en la unidad.

Iniciamos el estudio del triángulo oblicuángulo con la construcción de los mismos de acuerdo a los datos que disponemos, usando regla y transportador de ángulo.

Los teoremas del seno y del coseno son presentados a partir de una situación problemática, se analizan los datos de la misma para luego enunciar y demostrar ambos teoremas. Presentamos una variedad de problemas de aplicación de los teoremas estudiados.

En esta unidad sugerimos actividades que permiten trabajar los trasversales.

- **Educación democrática.** Leemos el artículo 91 de la Constitución Nacional y opinamos sobre las jornadas de trabajo y el descanso establecido en la misma).
- **Educación familiar y desarrollo personal.** En qué medida el ejercicio físico es un factor decisivo para el mantenimiento de una buena salud. Averiguamos en qué consisten los rayos ultravioletas, cómo pueden afectar a la salud de las personas y cuáles son los cuidados de la piel al exponerse al sol .
- **Educación ambiental.** Indagamos en diferentes fuentes sobre la época de «veda» en los principales ríos del país y los motivos por los que se establece. Averiguamos sobre los pantanales que existen en nuestro país y sobre las características de su ecosistema.

2.3.8. Algunos indicadores de evaluación

- Deduce el valor exacto de las funciones trigonométricas de un ángulo de 30º.
- Halla la equivalencia entre una función trigonométrica dada con otra del primer cuadrante.
- Identifica los datos del problema.
- Identifica el teorema a aplicar para resolver el problema.
- Calcula la incógnita mediante la fórmula del teorema del seno (o coseno).
- Verifica la solución obtenida en el problema.
- Asume con responsabilidad el trabajo realizado en aula.

2.3.9. Actividades complementarias

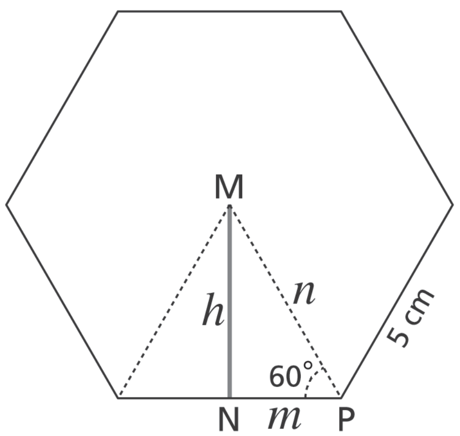
En este apartado sugerimos algunas actividades, además de las propuestas en el texto que servirán para retroalimentar lo aprendido, las mismas pueden realizarse como un trabajo en equipo.

A 3 Propuesta de actividad

TEMA Deducción de los valores de las funciones trigonométricas de ángulos notables.

OBJETIVO Deduzco los valores de las funciones trigonométricas de ángulos notables, usando polígonos regulares.

DESARROLLO Graficamos un hexágono regular de lado 5 cm, como indica la figura:



Calculamos la altura por la fórmula: $h = 1.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

Como en el triágulo equilátero los ángulos miden 60º, por tanto , en el triángulo rectángulo trazado **MMP,** el ángulo P= 60º

Por definición de: sen P= $\frac{h}{n}$

Reemplazamos: sen 60º= $\frac{\frac{5\sqrt{3}}{2}}{n}$

Calculamos cos 60º partiendo de su definición: n= $\frac{\frac{5\sqrt{3}}{2}}{\text{sen } 60^{\circ}} = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

cos 60º = $\frac{m}{n} = \frac{\frac{5}{2}}{5} = \frac{1}{2}$

Calculamos tg 60º = $\frac{h}{m} = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{2}}{\frac{5}{2}} = \sqrt{3}$

Para el cálculo de los ángulos de 30° se procede de la misma manera. Por último, completamos la tabla con los valores correspondientes:

α	sen α	cos α	tg
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	___

A 4 Propuesta de actividad

TEMA Resolución de triángulos oblicuángulos.

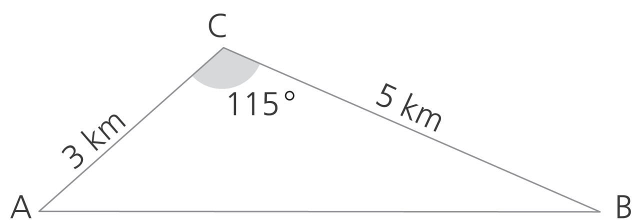
OBJETIVO Resuelvo problemas sobre triángulos oblicuángulos utilizando dos procedimientos.

DESARROLLO La Municipalidad de una ciudad desea construir un túnel entre dos puntos A y B. Para medir la distancia AB el topógrafo se sitúa en un punto C del terreno, distante 3 km de A y 5 km de B y mide con el teodolito el ángulo ACB = 115º.

¿Cuál es la longitud aproximada del túnel?

Resolvemos:

- Los datos relevantes del problema son:
  Los lados $\overline{AC}$ = 3 km y $\overline{BC}$ = 5 km; $\measuredangle ACB$ = 115º
- ¿Qué nos pide el problema? Nos pide calcular la longitud del túnel.
- Para resolver vamos a utilizar el teorema del coseno, pues conocemos dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.



Partimos de la Fórmula: $c^2 = b^2 + a^2 - 2.a.b.\cos \measuredangle C$

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 - 2.\overline{AC}.\overline{CB}.\cos \measuredangle C$$

$$\overline{AB}^2 = 3^2 + 5^2 - 2.3.5 \cos 115^{\circ}$$

$$\overline{AB}^2 = 9 + 25 - 30 \cos 115^{\circ} = 46{,}07$$

$$\overline{AB} \cong 6{,}8 \text{ km}$$

La longitud del túnel es aproximadamente de 6,8

A 5 Propuesta de actividad

TEMA Variación de la función y = a sen x. Puntos de corte con el eje x. Puntos máximos y mínimos

OBJETIVO Construyo la función seno en el plano cartesiano, utilizando la técnica del hilorama.

Señalo los puntos de corte en el eje x.

Identifico en el plano los puntos máximos y mínimos.

MATERIALES *Isopor,* papel cuadriculado, alfileres, hilos de bordar de diferentes colores.

DESARROLLO

PRIMERO

Preparamos los materiales de la siguiente manera:

- Cortamos el *isopor* en forma rectangular y forramos con papel cuadriculado.

- Trazamos el plano cartesiano y dividimos en cuadrantes a la izquierda y derecha del P(0,0) que es el origen del sistema.
- Nombramos los puntos del eje x en radianes

$$\left(-2\pi,\ -3\pi,\ -\pi,\ -\frac{\pi}{2},\ 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ 3\frac{\pi}{2},\ 2\pi\right).$$

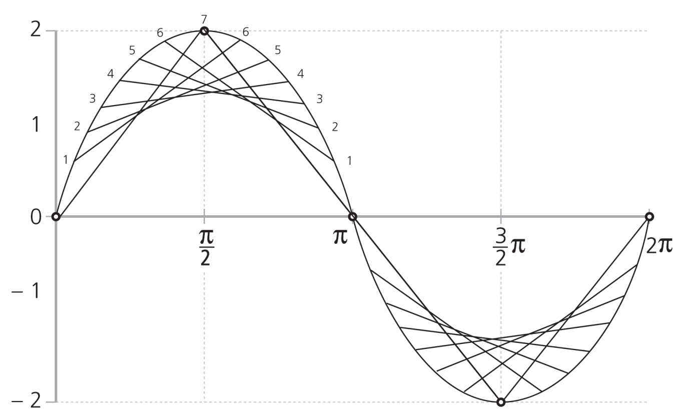
- En el eje y señalamos las amplitudes de las funciones y = a sen x ; y = 2 sen x e y = 3 sen x, recordando que la amplitud de una función trigonométrica es el valor absoluto del coeficiente "a"; es decir I a I = amplitud.

SEGUNDO

Trazamos las tres funciones y luego colocamos a una misma distancia los alfileres sobre el trazado de las funciones con períodos 2π cada una.

TERCERO

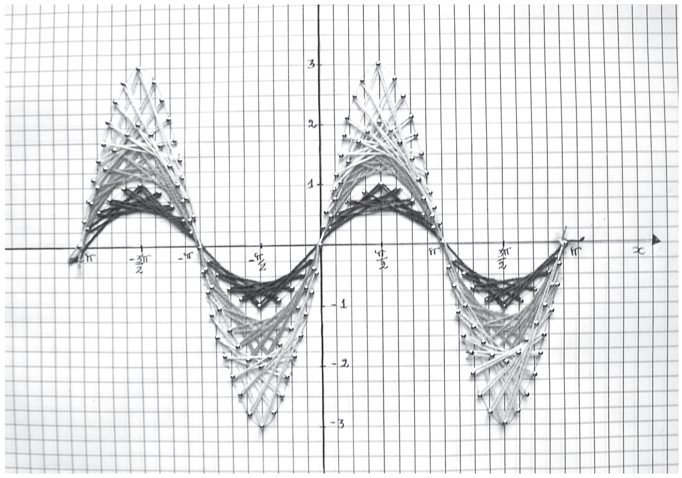
Utilizamos el método del sastre para entrelazar los hilos como se muestra en la siguiente figura que representa la función y = a sen x, en el período de [0, 2π]:



- Numeramos los alfileres del 0 al 7.
- Unimos los puntos de manera que siempre sumen 7. Por ejemplo: el 0 y el 7, el 1 y el 6, el 2 y el 5 y así sucesivamente hasta completar el primer período [0,π].

CUARTO

Procedemos de misma manera para los demás períodos, utilizando distintos colores de hilo para cada función.



QUINTO

Entresacamos los puntos de corte de las funciones con el eje x, observando el gráfico.

P1 (–2π , 0) , P2 (–π , 0), P3 (0, 0) , P4 (π , 0) y P5 (2π , 0)

SEXTO

Estudiamos la variación de las tres funciones en los cuadrantes dados y resumimos en una tabla.

Ángulos en radianes	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$3\frac{\pi}{2}$	2π	$-\frac{\pi}{2}$	− π	$-3\frac{\pi}{2}$	− 2π
y = sen x	0	1	0	− 1	0	− 1	0	1	0
y = 2 sen x	0	2	0	− 2	0	− 2	0	2	0
y = 3 sen x	0	3	0	− 3	0	− 3	0	3	0

SÉPTIMO

Entresacamos los puntos máximos y mínimos de la función y = 3 sen x

$P_1\left(\frac{\pi}{2}, 3\right)$ punto máximo $P_3\left(3\frac{\pi}{2}, -3\right)$ punto mínimo

$P_2\left(-3\frac{\pi}{2}, 3\right)$ punto máximo $P_4\left(-\frac{\pi}{2}, -3\right)$ punto mínimo

OCTAVO

Concluimos que este trabajo facilitará la comprensión de los alumnos y las alumnas al experimentar con esta técnica de hilorama la construcción de su propio aprendizaje.