BICENTENARIO
EDUCATIVO

PARAGUAY TODOS Y TODAS

"Bicentenario de la Independencia Nacional: 1811 - 2011"

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CULTURA
Presidencia de la República del Paraguay

El Colegio, nuestro punto de encuentro

Material de distribución gratuita. Prohibida su venta

MÓDULO 3

Matemática

MÓDULO 3: GEOMETRÍA ANALÍTICA

Campaña de Apoyo a la Gestión Pedagógica a Docentes en Servicio - 2011

PARAGUAY TODOS Y TODAS
PARAGUAY BICENTENARIO

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CULTURA
Presidencia de la República del Paraguay

omapa
ORGANIZACIÓN MULTIDISCIPLINARIA DE APOYO A PROFESORES Y ALUMNOS

El Colegio, nuestro punto de encuentro

FICHA TECNICA

Presidente de la República
Fernando Lugo Méndez
Ministro de Educación y Cultura
Luis Alberto Riart Montaner
Viceministro de Educación para el Desarrollo Educativo
Héctor Salvador Valdez Alé
Viceministra de Educación para la Gestión Educativa
Diana Carolina Serafini Fernández
Directora General de Educación Media
Alcira Concepción Sosa Penayo
Directora de Bachillerato Científico
Ana Claudia Meza
Director de Bachillerato Técnico
Ramón Iriarte
Director Administrativo
Marcelo Esquivel
Coordinadora Unidad de Resignificación de la Educación Media:
Sara Raquel López Cristaldo
Elaboradoras:
Diana Giménez de von Lücken
Ingrid Wagener de Gauto

Bibliografía

1) **Giovanni, José Ruy y otros** (1998). Matemática Fundamental Editorial FTD Volumen único, Brasil.

2) **Di Pietro, Donato** (1975). Geometría Analítica del plano y del espacio y nomografía. Segunda Edición. Librería y Editorial Alsina. Buenos Aires. Argentina

3) **Fleming, Walter; Dale Varberg** (1991). Álgebra y trigonometría con Geometría Analítica. Prentice Hall. Tercera Edición, México.

4) **Guerrero, I.** Tópicos de Geometría Analítica. http://iguerrero.wordpress.com/2009/06/29/topicos-de-geometria-analitica-3/

5) **Apuntes de clase de las autoras.** La mayoría de los ejercicios y problemas propuestos en este cuadernillo son de elaboración propia. Los mismos fueron creados por las autoras para el desarrollo de sus propias cátedras y han sido aplicados y validados durante sus prácticas de aula.

Índice

Reflexión final

Artículo: **¿Qué aplicaciones tiene la Geometría Analítica?** Por el Ing. I. Guerrero (México).

"Desde que la Geometría Analítica nació hasta ahora existen muchos tipos de curvas "naturales" (otras inventadas) perfectamente convertidas a una ecuación, pero falta mucho por hacer. ¡He ahí una oportunidad para todos!*¿Podrías encontrar la ecuación matemática para estudiar menos y aprender mucho? ¿Podrías encontrar la ecuación para comprar mucho y gastar poco? ¿Podrías encontrar la ecuación para sacarles la mayor cantidad de dinero a tus padres y que te molesten lo menos posible?* O si ya eres padre de familia, *¿podrías encontrar la ecuación para que tus hijos adolescentes obtengan las mejores calificaciones y te den menos problemas?* Todos estos son procesos y en teoría pueden ser plasmados en una ecuación, pero no es tan fácil hacerlo, quizá con los años esto que ahora es broma, ya no lo sea entonces".

En esta jornada hemos trabajado con una parte muy importante de la matemática, ya que es la base para estudiar otros conceptos matemáticos más profundos, por lo tanto, cabe destacar, que lo expuesto en este curso debe servir como un trampolín para seguir ahondando en el estudio la Geometría Analítica y su relación con las demás áreas.
Para terminar, nombramos una palabras de los célebres matemáticos Julio Rey Pastor, Luis Santaló y Manuel Balanzar en su libro "Geometría Analítica":
"Es claro que al democratizar la Geometría, antes patrimonio de unos pocos, ésta pierde el encanto de la agudeza y de la sutil elegancia; pero también dentro de la Geometría Analítica tiene cabida el artificio ingenioso y el cálculo breve y elegante, que contrasta con el tedioso formulismo, lento y ciego, en que incurren quienes aprenden el mecanismo metódico, sin captar su esencia y su espíritu."

12) Divide entre $a^2 b^2$ la relación que te quedó en el ítem anterior y escribe la fórmula en el recuadro.

La ecuación de la elipse centrada en el origen y cuyo eje mayor está sobre el eje de abscisas es: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

La ecuación de la elipse centrada en el origen y cuyo eje mayor está sobre el eje de ordenadas es: $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$.

La ecuación de la elipse centrada en C (h, k) y cuyo eje mayor es paralelo al eje de abscisas es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1.$$

La ecuación de la elipse centrada en C(h, k) y cuyo eje mayor es paralelo al eje de ordenadas es: $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$.

Introducción

Este cuadernillo ha sido elaborado para ser utilizado en las jornadas de la Campaña de Apoyo a la Gestión Pedagógica a Docentes en Servicio – 2011, en el Área de Matemática, con los y las docentes participantes.

En cada uno de los talleres, se desarrollan actividades a ser propuestas por los y las docentes a sus estudiantes, a fin de lograr la apropiación de los conceptos de Geometría Analítica por parte de los mismos.

Reflexión

Para reflexionar repartimos coordenadas de puntos y pedimos a los y las participantes que se reúnan según el cuadrante del plano cartesiano que les ha correspondido.

Reflexión para el PRIMER CUADRANTE.

"Mientras el Álgebra y la Geometría tomaron caminos distintos, su avance fue lento y sus aplicaciones limitadas. Pero cuando las dos ciencias se complementaron, se contagiaron una a la otra de vitalidad, y de ahí en adelante marcharon con ritmo rápido hacia la perfección."

Joseph- Louis Lagrange

Desde los griegos hasta nuestros días se ha estudiado la Geometría Euclidiana, pero como todos sabemos, la misma tiene sus limitaciones. El gran avance en el estudio de la Geometría lo realizó René Descartes, quien estableció un nuevo método llamado Geometría con coordenadas, relacionando las figuras geométricas (punto, recta, plano) con los elementos del Álgebra (pares ordenados de números reales, ecuaciones, sistemas de ecuaciones, etc.). Esta Geometría de Descartes, llamada Geometría Analítica, no pudo nacer hasta que la incipiente Álgebra edificó un algoritmo general, logro atribuido a Vieta a fines del siglo XVI y que sirvió como instrumento para que Fermat y Descartes descubrieran un nuevo mundo, que otros grandes matemáticos de su época como Schooten, Sluse, Girard y Ghetaldi estuvieron muy cerca de descubrir, pero sin éxito.

Reflexión para el SEGUNDO CUADRANTE.

Artículo: **¿Qué aplicaciones tiene la Geometría Analítica?**
Por el Ing. I. Guerrero (México)[1].

"Aplicaciones existen infinitas, todo depende del interés y de la inteligencia del que la utiliza. En el fútbol, mientras todo el mundo observa si la pelota entra o no en el arco rival para gritar el tan ansiado ¡¡Gooool!!, hay unos que ven además una parábola. Tiras una piedra al aire y mientras la gente observa cómo se eleva para después caer tú ves, además, una parábola, estudias el movimiento de los planetas alrededor del Sol y ves que se forman elipses".

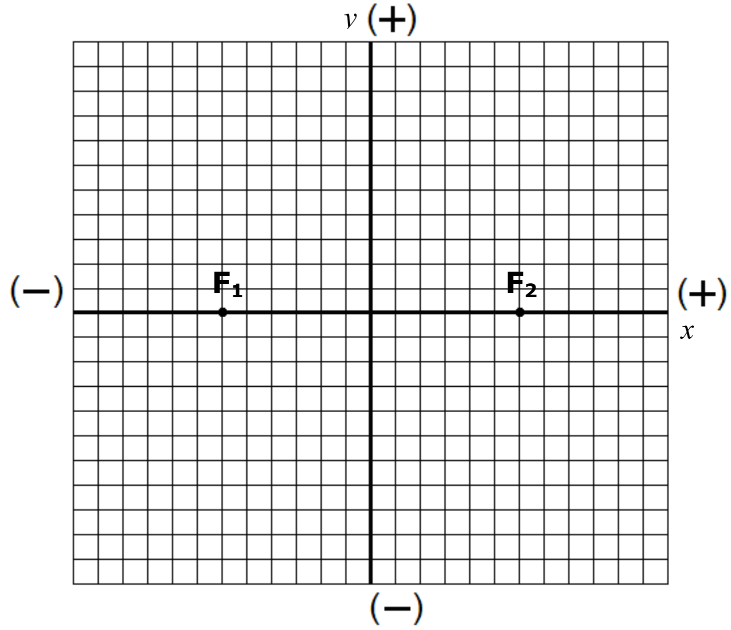
Reflexión para el TERCER CUADRANTE.

Artículo: **¿Qué aplicaciones tiene la Geometría Analítica?**
Por el Ing. I. Guerrero (México).

"Estudiar teoría de Geometría Analítica significa convertir lo que ves, una situación real, visible a todo el mundo, al lenguaje matemático haciendo una ecuación, por ejemplo cuando haces la ecuación de la trayectoria rectilínea de un avión durante cierto tiempo, cuando haces la ecuación de la trayectoria de una bala en todo momento, cuando haces la ecuación de la recta que forma el pasamanos de una escalera, cuando haces la ecuación de la curva de una antena parabólica, del filo de la regla o de la escuadra con que realizas trazos, del asta de la bandera, etc".

1) Tópicos de Geometría Analítica. Consultado en http://iguerrero.wordpress.com/2009/06/29/topicos-de-geometria-analitica-3/

6)



Ahora suma las distancias del ítem 4 e iguálalas a 2a.

7) Aplica tus conocimientos de álgebra para eliminar las raíces (no es un trabajo sencillo).

8) Cuando ya no puedas continuar solo, trabaja con un compañero. Deberían llegar a la expresión:

$$a^2x^2 + a^2c^2 - 2a^2cx + a^2y^2 = a^4 + c^2x^2 - 2a^2cx.$$

9) Factoriza la expresión del ítem 8 sacando como factores comunes x^2, y^2, a^2.

Deben llegar a la expresión $\left(a^2 - c^2\right)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$.

10) Si hemos considerado que "a" es mayor a "c", ¿cómo son a^2 y c^2?

11) Según el ítem 10, $a^2 > c^2$, por lo tanto, $a^2 - c^2$ es positivo y podemos escribir que $a^2 - c^2 = b^2$, que al sustituir en la relación del ítem 9 queda ………………………………………………

Elipse

TALLER 14

Con el taller 14, el estudiante podrá descubrir, a partir de un método práctico, conocido como **"método del jardinero"**, la ecuación de la elipse.

Realizamos las siguientes actividades en el patio del colegio:

1) Los y las estudiantes clavan dos estacas a una distancia aproximada de dos metros.

2) Luego atan los extremos de una soga de más de cuatro metros de largo a las estacas.

3) Utilizando algún elemento que sirva para marcar en el suelo, tensan la soga y van marcando en el suelo la curva que se describe.

4) Luego acortan la soga y proceden de la misma forma que en el ítem 3. Esto lo pueden repetir las veces que crean necesario.

5) En cada caso, la curva que se ha formado se llama **elipse** y se define como "Conjunto de puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante".

Luego pasamos al aula, y seguimos con las siguientes actividades:

1) En el plano cartesiano que aparece a continuación están marcados dos puntos fijos (llamados focos y denotados por F_1 y F_2). Estos focos están sobre el eje de abscisas, a la misma distancia "c" del origen de coordenadas. A la distancia entre los focos se le llama distancia focal.

2) ¿Qué distancia hay entre los dos focos?_____________ _____

3) ¿Cuáles son las coordenadas de los focos?________________

4) Si P es un punto cualquiera de la elipse, escribe la fórmula para calcular la distancia de P a F_1 y de P a F_2.

5) Por la definición de elipse sabemos que la suma de las distancias del ítem 4 es una constante y llamémosle a este valor "2a". ¿Cómo debe ser el valor de 2a en relación a 2c? ¿Por qué?

Reflexión para el CUARTO CUADRANTE.

Artículo: **¿Qué aplicaciones tiene la Geometría Analítica?**
Por el Ing. I. Guerrero (México).

"Bueno… se trata de que descubras lo que oculta la naturaleza, lo que no es visible a todo el mundo y que solo las mentes privilegiadas -como la tuya- pueden verlo. La gente común se conforma con mirar y saber utilizar las cosas, tú, además de lo anterior debes saber cómo están compuestas interiormente, esto es ir un paso más allá que los demás, esto es EVOLUCIÓN. Según don René Descartes inventor de la *Geometría Analítica*, todo lo que nos rodea está compuesto de puntos, rectas y curvas, por lo tanto la naturaleza y sus procesos pueden ser interpretados matemáticamente por medio de ecuaciones y gráficos que las contengan… *¿¡Qué tal!?* Por ejemplo busca en ti y entre tus cosas cinco circunferencias".

El grupo correspondiente a cada cuadrante deberá elaborar, en una cartulina, una lista donde se consignen ideas y pensamientos de los/las docentes del grupo sobre la Geometría Analítica. Luego, cada lista deberá ser entregada al facilitador/a para ser expuesta en la "galería de cuadros".

Puntos en el plano cartesiano

Se presentan tres propuestas diferentes como Taller 1. El o la docente podrá escoger alguna de ellas, según la disponibilidad de materiales y espacio.
En todos los casos, el Taller 1 tiene como objetivo que el y la estudiante comprenda la importancia de la asociación de puntos del plano con pares ordenados de números reales.

TALLER 1 (PROPUESTA N° 1)

Parte 1

1) Colocar en el piso de la sala de clases dos cintas en forma perpendicular, cruzando completamente la sala.
2) Entregar a cada estudiante una figura diferente (preparada por el o la docente) que debe colocar en cualquier parte del piso pero con la condición de que lo haga en las esquinas de las baldosas (las mismas deben ser cuadradas).
3) En una hoja, cada estudiante debe escribir las instrucciones para que un/a compañero/a pueda identificar el punto donde se encuentra su figura. No pueden dar ninguna pista acerca de la figura, solamente las instrucciones de cómo encontrarla en relación a las rectas que aparecen en el suelo. Tampoco pueden usar referencias de puertas, paredes, muebles, etc.
4) El docente recoge las hojas de los y las estudiantes y se las entrega a otro/a compañero/a.
5) En un tiempo de 3 minutos, cada estudiante debe intentar encontrar la figura según las instrucciones dadas por el/la compañero/a. Cada estudiante tiene una única oportunidad para encontrar la figura.
6) Luego de terminado el tiempo, los y las estudiantes explican las dificultades que han tenido para encontrar la figura y dan sugerencias para realizar más fácilmente el trabajo.
7) Seguidamente, el/la docente coloca en los dos extremos de una de las cintas una "x", y una "y" en los dos extremos de la otra cinta.

TALLER 13

El objetivo del taller 13 es resolver diferentes ejercicios que involucren el concepto de parábola y sus elementos. La propuesta es utilizar una ficha que los/as estudiantes deben completar atendiendo los datos en cada uno de los casos.

Ejercicios de parábola.
Completa el siguiente cuadro según la información dada.

Ecuación de la parábola	Vértice	Foco	Directriz	Semi Pará metro	Concavidad
$X^2 = 4y$					
	V(2,4)			6	abajo
	V(0,0)	F(5,0)			
$y^2 = -16x$					
	V(2,2)			2	arriba
$y^2 = 4x - 8$					
		F(1,0)	X= -1		
	V(-3,2)		X =0		
		F(2,3)	X + 4 = 0		
$y^2 = 12x$					
		F(10,0)	X = -10		
$(y+1)^2 = 2(x+1)$					
		F(-4,-3)	X= -8		
$x^2 = -12y$					

Al valor numérico $|p|$ se le llama **semi parámetro** o distancia focal de la parábola.

Al punto V en el eje de la parábola (recta que pasa por el foco y es perpendicular a la bisectriz) equidistante del foco y de la directriz se le denomina vértice. En todos los casos estudiados, V está en el origen de coordenadas.
Las ecuaciones de las parábolas con vértices V (0,0) son:
$y^2 = 4\,p\,x$ (concavidad hacia la derecha)
$y^2 = -4\,p\,x$ (concavidad hacia la izquierda)
$x^2 = 4\,p\,y$ (concavidad hacia arriba)
$x^2 = -4\,p\,y$ (concavidad hacia abajo)

9) Considerando que el vértice de la parábola es el punto V (h, k), la directriz es paralela al eje de ordenadas y la distancia focal es $|p|$, entonces:

a) escribe las coordenadas del foco; la ecuación de la directriz y deduce la ecuación de la parábola con la concavidad hacia la derecha.
b) escribe las coordenadas del foco; la ecuación de la directriz y deduce la ecuación de la parábola con la concavidad hacia la izquierda.

10) Considerando que el vértice de la parábola es el punto V (h, k), la directriz es paralela al eje de abscisas y la distancia focal es $|p|$, entonces:

a) escribe las coordenadas del foco; la ecuación de la directriz y deduce la ecuación de la parábola con la concavidad hacia arriba.
b) escribe las coordenadas del foco; la ecuación de la directriz y deduce la ecuación de la parábola con la concavidad hacia abajo.

Las ecuaciones de las parábolas con vértice V (h, k) son:
$(y-k)^2 = 4\,p\,(x-h)$ (concavidad hacia la derecha)
$(y-k)^2 = -4\,p\,(x-h)$ (concavidad hacia la izquierda)
$(x-h)^2 = 4\,p\,(y-k)$ (concavidad hacia arriba)
$(x-h)^2 = -4\,p\,(y-k)$ (concavidad hacia abajo)

8) Se repite el trabajo desde el ítem 3 hasta el 6.
9) Ahora el/la docente coloca un signo (+) y un signo (-) en los extremos de cada cinta y se procede nuevamente a repetir el trabajo desde el ítem 3 hasta el 6.

Es el momento de explicar a los y las estudiantes la importancia de utilizar un sistema de coordenadas para ubicar los puntos en el plano.

Parte 2
Se reparten puntos de colores recortados en cartulina con coordenadas al dorso, de modo que cada uno ubique un punto en el plano cartesiano.
Observación: las partes 1 y 2 del taller 1 pueden utilizarse en cualquier curso en el que el/la docente desee introducir el concepto de coordenadas. Se presenta en este material por el simple hecho de que en la jornada se trabaja con conceptos de Geometría Analítica, pero puede resultar muy interesante trabajarlo ya con los y las estudiantes del séptimo grado, quienes inician el estudio de números enteros y la ubicación de puntos en el plano.

TALLER 1 (PROPUESTA N° 2)

En el **Gráfico 1** aparece el plano de una ciudad matemática, donde las avenidas principales llevan los nombres de dos grandes matemáticos, Pierre de Fermat y René Descartes. Afortunadamente, la ciudad está dispuesta como una perfecta cuadrícula, lo que facilita mucho la ubicación de puntos específicos de la misma.

Con motivo del año del Bicentenario de la independencia patria se organizaron, en algunos puntos de la ciudad, actividades artísticas para los y las jóvenes. Algunos de los grupos participantes son: “Las Paralelas Rockeras”, “Los Triángulos del Reggae”, “Cortados por la Secante”, “las Parábolas Decadentes”, “Punto 21”, “Perímetro 96”, “Los Circulitos de Ricota”, “Las Asíntotas Perdidas”, “Las Curvas Tangenciales” y “Los Focos Redimidos”.
Para que los y las jóvenes puedan participar de la jornada artística se repartieron planos como el del Gráfico 1, con las

instrucciones para llegar a cada sitio. Las instrucciones son las siguientes:

a) El cruce de las avenidas Pierre de Fermat y René Descartes es el punto (0,0) del plano.

b) En cada par de la forma (a, b) el valor de "a" debe ser considerado sobre la avenida de Fermat y "b" sobre la avenida de "Descartes".

c) Para una mejor ubicación, se le asigna un signo a los valores absolutos de "a" y de "b", de tal manera que mirando de frente el plano los valores positivos de "a" se ubican a la derecha y los negativos a la izquierda, los valores positivos de "b" hacia arriba y los negativos hacia abajo.

d) Las coordenadas donde se pueden encontrar a los distintos grupos son las siguientes:

"Las Paralelas Rockeras"	en (5,7)
"Los Triángulos del Reggae"	en (8,2)
"Cortados por la Secante"	en (7,-5)
"Las Parábolas Decadentes"	en (2, -8)
"Punto 21"	en (-4,7)
"Perímetro 96"	en (-1,1)
"Los Circulitos de Ricota"	en (-4,-4)
"Las Asíntotas Perdidas"	en (-7, -8)
"Las Curvas Tangenciales"	en (0,10)
"Los Focos Redimidos"	en (8,0)

e) Ubica en el plano que aparece a continuación la posición de cada uno de los puntos donde tocarán las distintas bandas musicales.

7) Determina las coordenadas del centro de la circunferencia cuya ecuación general es $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$.

8) Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos (-1, 0), (2, -1) y (2, 1).

9) Determina el valor de K para que la recta de ecuación $y = Kx$ sea tangente a la circunferencia de ecuación
$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 9$.

Parábola

TALLER 12

Con el taller 12, el o la estudiante podrá descubrir, a partir de la definición de parábola, la ecuación de la misma.

1) Partiendo de la definición de parábola: "Una parábola es el lugar geométrico (o conjunto de puntos) del plano cuya distancia a un punto fijo llamado **foco** y a una recta fija llamada **directriz** es constante." Considera como punto fijo el punto F(p,0) y como recta fija, la recta DD´de ecuación: x = -p. ¿Cómo son las distancias desde el origen de coordenadas a F y a DD´? ¿Satisface el punto (0,0) la definición de parábola?.

2) Si consideras que el punto P(x, y) es un punto de la parábola, escribe:

a) la distancia de P a F:________________________
b) la distancia de P a DD´:______________________

3) Iguala las relaciones a) y b) del ítem 2)_______________

4) Eleva al cuadrado ambos miembros de modo a eliminar la raíz cuadrada.

5) Simplifica la expresión reduciendo los términos semejantes.

6) Escribe la ecuación que has obtenido.

7) Ahora infiere (o demuestra) qué ocurre si el foco es F (-p,0) y DD´: x = p.

8) Analiza los dos casos siguientes:
a) F (0, p) y DD´: y = -p
b) F (0,-p) y DD´: y = p

La ecuación de la circunferencia de centro C (h, k) y radio "r" está dada por $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.

TALLER 11

El objetivo del taller 11 es resolver problemas de circunferencia aplicando la definición de la misma y los conceptos estudiados anteriormente, como: punto medio, rectas perpendiculares, distancia de un punto a una recta, intersección de rectas, etc. Se propone el uso de fichas.

Se preparan fichas con problemas de circunferencia como los que aparecen a continuación (éstos son solamente una muestra de los problemas que el/la docente puede escoger). Los y las estudiantes recogen una ficha (sin importar el orden de elección), copian el problema en su cuaderno, lo resuelven y pasan a chequear su solución con la tabla de resultados que tiene el o la docente sobre su mesa o que ha pegado en la pizarra.

Problemas de circunferencia.

1) Determina la ecuación de la circunferencia de centro C (1, 6) y radio r = 5.
2) Determina la ecuación de la circunferencia de centro C (-4, - 5) y que pasa por el punto P (-4, 0).
3) Determina la ecuación de la circunferencia de centro C (2, 6) y que es tangente al eje de ordenadas.
4) Determina la ecuación de la circunferencia de radio r= 6 y que es concéntrica a la circunferencia de ecuación $(x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 16$.
5) Determina la ecuación de la circunferencia que tiene como uno de sus diámetros al segmento con extremos en los puntos A (2, 3) y B (6, -5).
6) Determina la ecuación de la circunferencia de r = 6 y cuyo centro se encuentra ubicado en la intersección de las rectas $x + 2y - 1 = 0$ y $x - 2y - 7 = 0$.

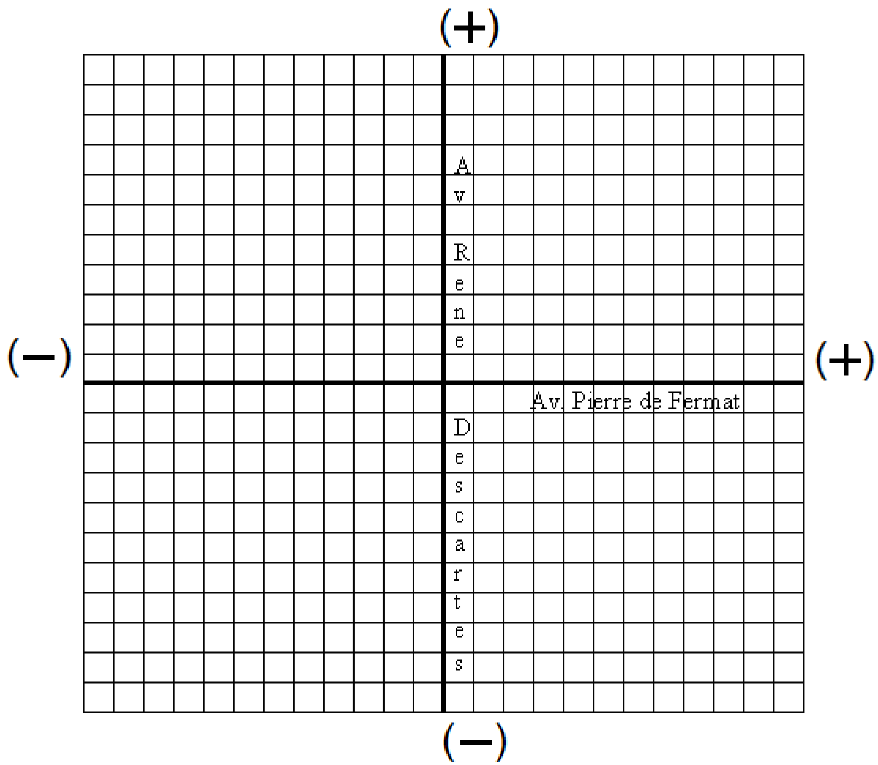
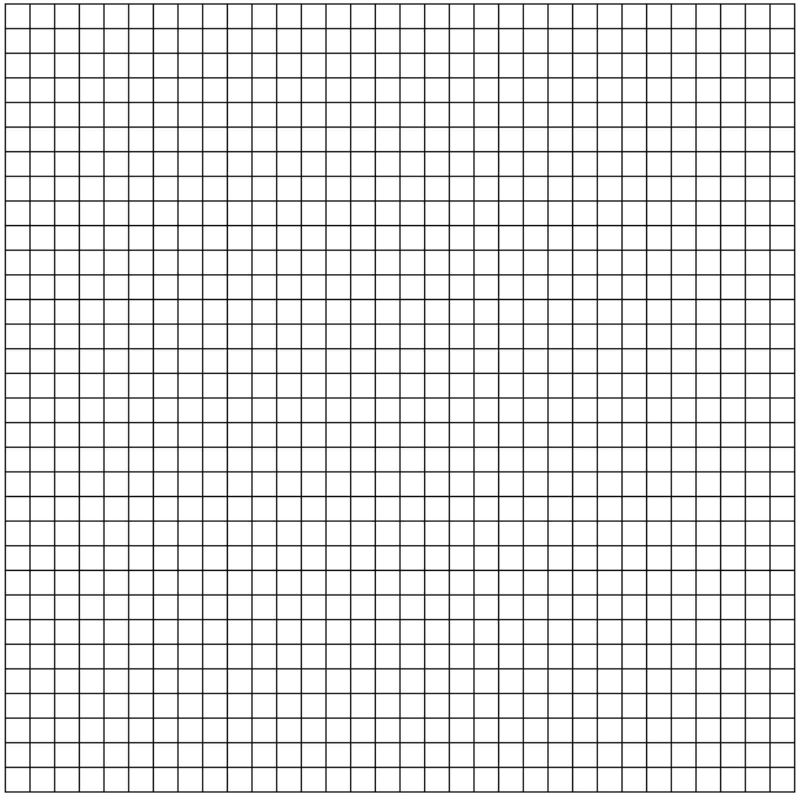


Gráfico 1

TALLER 1 (PROPUESTA N° 2)

a) Se forman grupos con cinco estudiantes en cada uno.
b) Cada grupo elige un líder.
c) El/la docente aparta a los líderes de cada grupo y les reparte una cuadrícula como la que se presenta a continuación.
d) Cada líder marca en su hoja cinco puntos, atendiendo de ubicar los puntos en las esquinas de los cuadritos y se la entrega nuevamente al /a la docente.
e) El/la docente reparte las hojas nuevamente a los líderes, atendiendo que ninguno reciba la suya.



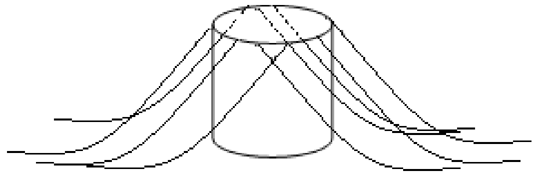
f) Los líderes permanecen separados de sus grupos.
g) Se forma una gran ronda con todos los y las estudiantes (excepto los líderes), manteniéndose juntos los integrantes de cada grupo (uno al lado de otro en la ronda).
h) Cada grupo recibe una hoja similar a la que recibieron los líderes.
i) Cada líder debe transmitir a su grupo la ubicación de los puntos que tiene marcados en su hoja. Para que el juego sea ordenado se sortearán turnos.
j) El grupo que ubica los puntos con mayor exactitud gana la competencia y recibe puntos de bono (puntos que el/la docente podría otorgar fuera de la escala para incentivar el trabajo de los y las estudiantes).

Circunferencia

TALLER 10

En el taller 10 se trabaja la deducción de la ecuación de la circunferencia de centro C (h, k) y radio “r”.

1) Colocar en el centro del aula, sobre una mesa, una lata cargada de arena (o algo que haga peso) con hilos sujetos a su tapa, como se muestra en la figura.



2) El/la docente entrega la punta de un hilo a cada estudiante y les pide que lo tensen.

3) Una vez que todos estén ubicados podrán observar que se ha formado una circunferencia y que cada uno de ellos es un punto de la misma.

4) Los y las estudiantes deben sacar las conclusiones referentes a la definición de circunferencia.

“Una circunferencia es un conjunto de puntos del plano que equidistan (están todos a la misma distancia) de un punto fijo “C” llamado centro.”

El o la docente reparte una hoja con las siguientes instrucciones:
a) Considera que el punto fijo C tiene por coordenadas a los números reales “h” y “k”, es decir que, el centro de la circunferencia tiene coordenadas C (h, k).
b) Si P(x, y) representa un punto arbitrario del plano, aplica la fórmula de distancia entre los puntos C y P de modo que ésta sea igual a ”r”, teniendo en cuenta la definición de circunferencia, para determinar la ecuación de la circunferencia con centro C y radio r.

2) Encuentra la intersección de las rectas dadas en el ítem 1.

3) Si se asegura que la recta de ecuación $2x + 5y - 7 = 0$ corta al eje de abscisas, ¿en qué punto lo hace?.

4) ¿En qué punto interseca la recta de ecuación $x + 5y - 2 = 0$ al eje de ordenadas?.

5) ¿Cuánto deben valer "a" y "b" para que las rectas $2ax + 10y - 14 = 0$ y $12x + 3by - 15 = 0$ se corten en el punto Q (2,1)?

6) ¿Se intersecan las rectas $2x - y + 3 = 0$ y $2x + y - 1 = 0$? ¿Por qué? Calcula la pendiente de ambas rectas.

7) ¿Existe intersección entre las rectas $y = 2x + 3$ y $4x - 2y + 6 = 0$? ¿Cómo son las rectas dadas?

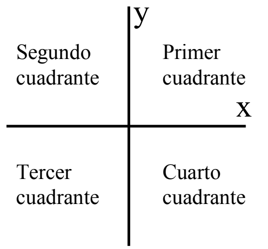
8) **Problema para investigar.**
Considera las rectas $2x + 3y = 4$ y $5x + qy = c$. ¿Cuáles son los valores de "q" y "c" para que el sistema :
   a) tenga una única solución?
   b) no tenga solución?
   c) tenga infinitas soluciones?

Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} y = m_1 x + b_1 \\ y = m_2 x + b_2 \end{cases}$, lo que podemos decir acerca de la solución es que:

a) si $m_1 \neq m_2$, tiene una solución única.
b) si $m_1 = m_2$ y $b_1 \neq b_2$, el sistema no tiene solución (las ecuaciones son incompatibles).
c) si $m_1 = m_2$ y $b_1 = b_2$, el sistema tiene infinitas soluciones (las ecuaciones son linealmente dependientes).

Formalización de lo aprendido
A continuación se encuentran los conceptos que el/la docente debe presentar a sus estudiantes.

El sistema cartesiano ortogonal está formado por dos rectas perpendiculares entre sí que reciben el nombre de **"eje de abscisas o eje x"** (la horizontal) y **"eje de ordenadas o eje y"** (la vertical). La intersección de las rectas se llama **"origen de coordenadas"**.
Estas rectas dividen al plano en cuatro regiones llamadas **cuadrantes** y se los identifica según aparece a continuación y en sentido antihorario.



Según como hemos establecido el sistema, es posible localizar cualquier punto del plano mediante un par ordenado de números reales. Si P(a, b) es un punto del plano, "a" es la abscisa de P y "b" es la ordenada de P y los números "a y b" se llaman coordenadas de P. Así tenemos que todo par ordenado (a, b) de números reales queda asociado a un único punto P del plano y que todo punto del plano queda determinado cuando se conocen su abscisa y su ordenada.

Distancia entre dos puntos del plano

TALLER 2

Con el taller 2 se pretende que los y las estudiantes descubran la fórmula que permite calcular la distancia entre dos puntos del plano.

1) En un plano cartesiano construido en una hoja cuadriculada, una cartulina o en el suelo, el/la docente marca puntos en distintas posiciones.

2) Se explica que la proyección de un punto (a, b) sobre el eje de abscisas es el punto de coordenadas (a, 0) y que la proyección sobre el eje de ordenadas es el punto (0, b).

3) Se pide en primer lugar a los y las estudiantes que calculen las distancias entre puntos que son extremos de segmentos paralelos a los ejes coordenados determinando previamente la proyección de cada uno de ellos sobre los ejes. (Observación: esta actividad es similar a la que se propuso en el módulo de Trigonometría y puede considerarse por lo tanto como un repaso). Por ejemplo, se puede pedir que los estudiantes calculen la distancia entre los puntos A(2, 5) y B(7, 5); entre C (-3, 6) y D (5, 6); entre E(-9, -3) y F(-3, -3), entre G(-2, 4) y H(-2, 6); entre I(6, 8) y J(6, -5). Los estudiantes deben llegar a la conclusión de que las distancias se calculan mediante el valor absoluto de la diferencia entre las abscisas y las ordenadas de ambos puntos.

4) Dados los puntos A (3, 4) y B (6, 8), se pide a los y las estudiantes que determinen la distancia entre los mismos. (Sugerencia: buscar el punto C en el plano cartesiano que permita construir un triángulo rectángulo de modo que el segmento con extremos en A y B sea la hipotenusa y los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ sean los catetos. Calcular las longitudes de $\overline{AC}$ y de $\overline{BC}$ y luego aplicar el teorema de Pitágoras para calcular la longitud de $\overline{AB}$.

5) En base a la conclusión obtenida en 4) se pide a los y las estudiantes que escriban una fórmula general que permita calcular la distancia entre dos puntos. Cada estudiante anota su fórmula en un papel y comparte con su compañero/a de al lado

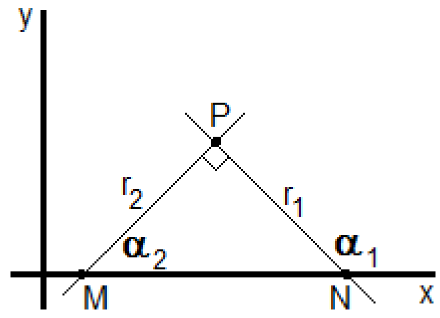


Gráfico 8

5) Recuerda la relación entre un ángulo exterior y los interiores no adyacentes a él y escribe α_1 en relación a los otros ángulos del gráfico.
6) Aplica la función tangente a la relación encontrada.
7) Recuerda la relación entre la tangente, el seno y el coseno de un ángulo. Escribe dicha relación y aplica la fórmula de seno y coseno de suma de arcos.
8) Simplifica lo que sea posible y escribe la relación que encontraste entre la tangente de α_1 y α_2.

> Si m_1 es la pendiente de la recta r_1, y m_2 es la pendiente de r_2:
> si r_1 es perpendicular a r_2, entonces $m_1 = -\dfrac{1}{m_2}$.
> si r_1 es paralela a r_2, entonces $m_1 = m_2$.

Punto de intersección de dos rectas

TALLER 9

> En el taller 9 se espera que el/la estudiante haga uso de su intuición y de sus conocimientos algebraicos para descubrir la forma de determinar el punto de intersección de dos rectas.

Intersección de rectas.
1) Considera las rectas: $x + 6y - 11 = 0$ y $3x - 2y + 7 = 0$, ¿qué debería ocurrir para asegurar que dichas rectas tienen un punto en común? ¿Qué harías para encontrar el punto común?

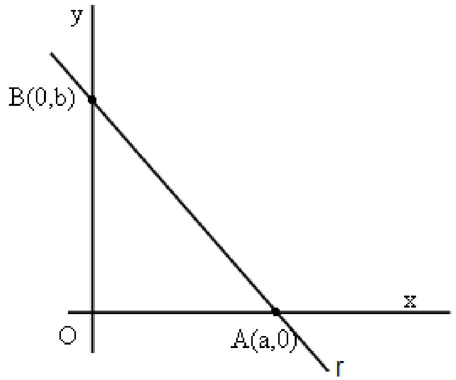


Gráfico 7

La ecuación segmentaria de la recta tiene la forma $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, donde "a" representa la abscisa al origen y "b" la ordenada al origen.

Posiciones relativas de dos rectas

TALLER 8

En el taller 8 se estudia la posición que puede tener una recta en relación a otra, esto es: las rectas pueden ser paralelas o concurrentes.

1) Compara las pendientes de las siguientes parejas de rectas.
a) $2x + 5y - 8 = 0$ y $4x + 10y + 7 = 0$
b) $- 5x + 2y - 3 = 0$ y $15x - 6y + 2 = 0$
2) ¿Cómo son las pendientes de las partes a y b del ítem 1? ¿Qué puedes concluir al respecto de la posición de las rectas?
3) Compara las pendientes de las rectas $3x + y - 2 = 0$ y $8x + 4y - 1 = 0$. ¿Son las rectas dadas paralelas?
4) Considera ahora dos rectas concurrentes y perpendiculares r_1 y r_2. Queremos encontrar la relación que existe entre las pendientes de las mismas, para ello, observa el **Gráfico 8**. ¿Qué tipo de triángulo es MPN?

de manera a ponerse de acuerdo acerca de lo que han escrito. Luego se juntan dos parejas y realizan la misma actividad de modo a que obtengan una formula única y la escriban en una hoja que pasan a colocar en la pizarra y a explicar cómo la encontraron. (Observación: a esta técnica de trabajar primero en forma individual, luego en pareja y seguidamente en grupos de 4, 8, etc, se le conoce como "bola de nieve".)

Si $P(x_1,y_1)$ y $Q(x_2,y_2)$ son dos puntos del plano, la distancia de P a Q, simbolizada por d (P, Q), se calcula mediante la fórmula $d(P,Q)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

Punto medio de un segmento

TALLER 3

Con el taller 3 se pretende que los estudiantes descubran por si solos la fórmula que permite calcular las coordenadas del punto medio de un segmento.

1) Considera en el plano cartesiano siguiente, los puntos arbitrarios $P(x_1,y_1)$ y $Q(x_2,y_2)$ y sea M (x, y) el punto medio entre P y Q. Se quiere determinar las coordenadas del punto M.

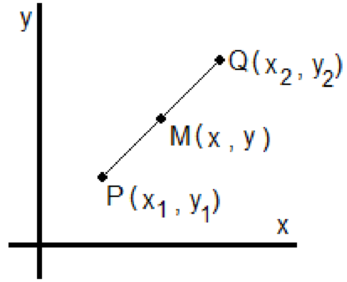


Gráfico 2

2) Traza en el **Gráfico 2** una paralela al eje de abscisas por el punto P y una paralela al eje de ordenadas por el punto Q. Las

paralelas trazadas se cortan en el punto A. Escribe en el gráfico, las coordenadas correspondientes a A.
3) Traza ahora la paralela al eje de ordenadas por el punto M. Esta paralela corta al segmento que une los puntos P y A en el punto B. Escribe en tu gráfico las coordenadas de B.
4) Observa que se han formado dos triángulos semejantes PQA y PMB. Por el teorema de Thales y como el segmento $\overline{MB}$ actúa como base media del triángulo PQA, se pueden escribir las siguientes relaciones entre las medidas de los segmentos: PB = BA y 2MB = QA. Escribe las relaciones anteriores como diferencia de coordenadas y luego despeja el valor de "x" e "y".

> Las coordenadas del punto medio entre $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ están dadas por $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$; $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

Rectas paralelas a los ejes coordenados

TALLER 4

> El objetivo del taller 4 es descubrir las ecuaciones de las rectas paralelas a los ejes coordenados.

1) Considera en el **Gráfico 3**, la recta "r" paralela al eje "y" que pasa por el punto A (h, k).

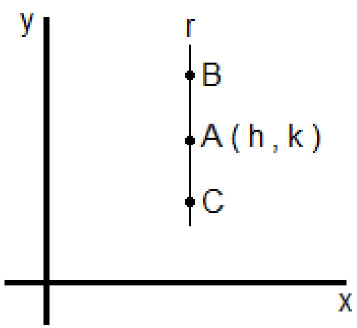


Gráfico 3

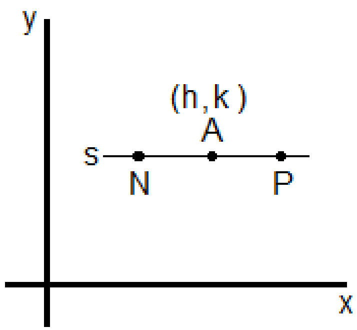


Gráfico 4

c) si solamente B = 0, entonces Ax + C = 0 y de ese modo $x = -\frac{C}{A}$, que es la ecuación de una recta paralela al eje "y" a una distancia $\left|-\frac{C}{A}\right|$.

d) si solamente A = 0, entonces By + C = 0 y de ese modo, $y = -\frac{C}{B}$ que es la ecuación de una recta paralela al eje "x" a una distancia $\left|-\frac{C}{B}\right|$.

e) si solamente C = 0, entonces Ax + By = 0, de ese modo $y = -\frac{A}{B}x$, que es la ecuación de una recta que pasa por el origen de coordenadas con pendiente $m = -\frac{A}{B}$.

Ecuación segmentaria de la recta

TALLER 7

> En el taller 7 se deduce la ecuación segmentaria de la recta, siguiendo las instrucciones dadas.

1) En el **Gráfico 7** puedes observar que la recta "r" corta a los ejes "x" e "y" en los puntos A y B, respectivamente. Determina la pendiente de la recta que pasa por los puntos A y B.
2) Escribe la ecuación explícita y, a partir de ella, la ecuación general de la recta.
3) Pasa al segundo miembro el término independiente y divide ambos miembros de la igualdad por dicho valor.
4) La ecuación que has obtenido se conoce como ecuación segmentaria de la recta. El número "a" se llama abscisa al origen y el número "b" se llama ordenada al origen.

La ecuación de la recta que corta al "eje y" en el punto (0, b) está dada por y = m x + b, donde el número "m" representa la pendiente de la recta y "b" recibe el nombre de ordenada al origen. Si "b" es positivo, la recta corta al eje "y" por encima del origen y si "b" es negativo, lo corta por debajo del origen.
"m" recibe el nombre de parámetro de dirección y "b" recibe el nombre de parámetro de posición.
Las variables x e y que aparecen en la ecuación y = mx + b, llamada **ecuación explícita**, se interpretan como las coordenadas de un punto cualquiera de la recta.

Un poco de teoría

En el taller 6 hemos escrito la ecuación de la recta conocida como **ecuación explícita**: y = mx + b.
Si la ecuación y = mx + b, la escribimos como mx - y + b = 0 podemos notar que la ecuación es del tipo Ax + By + C = 0. Esta ecuación recibe el nombre de **ecuación general** de la recta.
Si de la ecuación general despejamos el valor de "y", obtenemos la expresión $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$, que si comparamos con la ecuación explícita, nos permite escribir las siguientes relaciones $m = -\frac{A}{B}$ y $b = -\frac{C}{B}$, que representan la pendiente de la recta y la ordenada al origen, respectivamente.

Casos especiales.

Algunos casos particulares son:

a) si B = 0, C = 0 y $A \neq 0$, la ecuación se transforma en Ax = 0, esto es x = 0, ecuación que representa al eje y.
b) si A = 0, C = 0 y $B \neq 0$, la ecuación se transforma en By = 0, esto es y = 0, ecuación que representa al eje x.

2) Observa que también los puntos B y C pertenecen a la recta "r". De los puntos B y C, ¿puedes conocer la abscisa o la ordenada? ____

3) Según tu respuesta del ítem 2, ¿Qué sucede con todos los puntos de la recta "r"?_________________________________

4) Si solamente importa el valor de la abscisa, entonces la ecuación de la recta que pasa por A, B y C en el caso del ejemplo, esta dada por x = h.

5) Considera ahora en el **Gráfico 4** la recta "s", paralela al eje y. Los puntos A, N y P pertenecen a "s". Realiza un análisis análogo al de la recta "r". ¿Cuál es tu conclusión?

6) Escribe las ecuaciones de las rectas que representan a los ejes coordenados.

La ecuación de la recta que pasa por el punto P (h, k) es x = h
La ecuación de la recta que pasa por el punto P (h, k) es y = k

Rectas que pasan por el origen de coordenadas

TALLER 5

El objetivo del taller 5 es descubrir las ecuaciones de rectas que pasan por el origen de coordenadas.

1) Observa el **Gráfico 5**. La recta "r" pasa por el origen de coordenadas, contiene al punto genérico P(x, y) y forma un ángulo de dirección α con el eje x.

2) Proyecta el punto P sobre el eje de abscisas y llámalo Q. Se ha formado el triángulo rectángulo OPQ. Escribe el valor de la tangente de α en función de las coordenadas de los puntos conocidos.

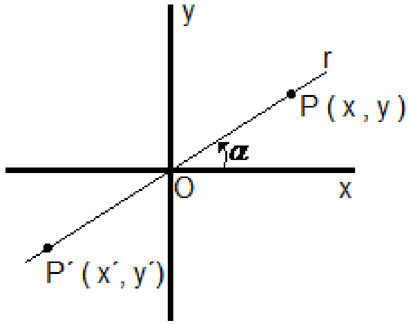


Gráfico 5

3) Si el punto P se moviese sobre la recta "r", ¿cambiaría en algo el valor de "tg α"?. ¿Por qué?

4) Si en lugar de P, consideras el punto arbitrario P' (x´, y´) ubicado también sobre "r" pero en el tercer cuadrante, ¿qué ángulo forma con la rama positiva del eje x? (Para medir dicho ángulo, se debe partir de la rama positiva del eje x, y avanzar en sentido antihorario).

5) Escribe la tangente del ángulo del ítem 4 en función de las coordenadas de P' y de su proyección Q'.

6) ¿Cómo son las tangentes de ángulos que difieren en 180º?

> Como tg α = tg (180º + α) entonces, si el punto considerado está en el primer o tercer cuadrante, tenemos que $\frac{y}{x} = \text{tg}\,\alpha$, luego la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas es: y = tg α x.
> A la tg α la representaremos a partir de ahora mediante "m" y diremos que **"m"** es la **pendiente** de la recta o el **coeficiente angular** de la misma. La ecuación de la recta representamos mediante y = m x.
> Si P es del segundo o del cuarto cuadrante, entonces m<0, y la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y por el punto P es y = m x (con m<0).

Rectas que no pasan por el origen

TALLER 6

> El objetivo del taller 6 es descubrir las ecuaciones de rectas que no pasan por el origen de coordenadas utilizando como punto de partida el taller 5.

1) En base a lo estudiado en el taller 5, ¿cómo es "m" si α es agudo?, ¿y si es obtuso?.

2) Observa el **Gráfico 6**. El punto O' se encuentra sobre el "eje y" y su ordenada es "b".

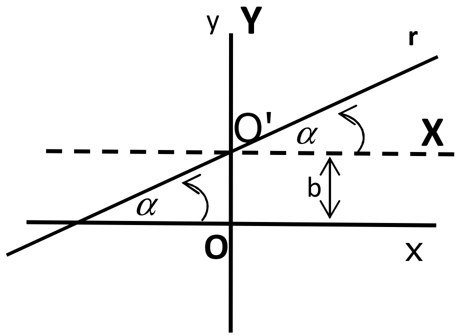


Gráfico 6

3) Escribe la ecuación de la recta "r" en relación al sistema de coordenadas **XO'Y** (debes tener en cuenta que el eje **X** es paralelo al eje x, y que el eje **Y** coincide con el eje y).____.

4) Considera un punto Q en el plano cartesiano cuyas coordenadas relativas al sistema **XO'Y** son X_0 e Y_0 y relativas al sistema xoy son x_0 e y_0. Escribe las relaciones entre X_0 y x_0 y entre Y_0 e y_0.____.

5) En base a lo que escribiste en el ítem 3 y teniendo en cuenta la relación del ítem 4, escribe la ecuación de dicha recta en términos del sistema xoy. ______________________________.