BICENTENARIO
EDUCATIVO

PARAGUAY TODOS Y TODAS

"Bicentenario de la Independencia Nacional: 1811 - 2011"

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CULTURA
Presidencia de la República del Paraguay

El Colegio, nuestro punto de encuentro

Material de distribución gratuita. Prohibida su venta

MODULO 2

Matemática

MÓDULO 2: MATRICES Y DETERMINANTES
ANÁLISIS COMBINATORIO
Campaña de Apoyo a la Gestión Pedagógica a Docentes en Servicio - 2011

PARAGUAY TODOS Y TODAS
PARAGUAY BICENTENARIO

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CULTURA
Presidencia de la República del Paraguay

omapa
ORGANIZACIÓN MULTIDISCIPLINARIA DE APOYO A PROFESORES Y ALUMNOS

El Colegio, nuestro punto de encuentro

Bibliografía

Giovanni, José Ruy y otros (1998). Matemática Fundamental Editorial FTD Volumen único. Brasil.

Guzmán, Miguel; José Colera (1989). Matemáticas I (COU). Editorial ANAYA.

Fleming, Walter; Dale Varberg (1991). Álgebra y trigonometría con Geometría Analítica. Prentice Hall. Tercera Edición. México.

Sobel, Max A.; Norbert Lerner (1989). Álgebra. Prentice Hall. Segunda Edición. México.

Apuntes de clase de las autoras. La mayoría de los ejercicios y problemas propuestos en este cuadernillo son de elaboración propia. Los mismos fueron creados por las autoras para el desarrollo de sus propias cátedras y han sido aplicados y validados durante sus prácticas de aula.

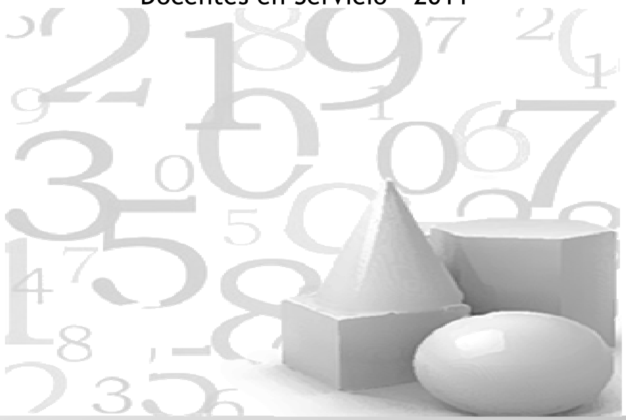
MODULO 2

Matemática

MÓDULO 2: MATRICES Y DETERMINANTES

ANÁLISIS COMBINATORIO

Campaña de Apoyo a la Gestión Pedagógica a Docentes en Servicio - 2011



FICHA TÉCNICA

Presidente de la República
Fernando Lugo Méndez
Ministro de Educación y Cultura
Luis Alberto Riart Montaner
Viceministro de Educación para el Desarrollo Educativo
Héctor Salvador Valdez Alé
Viceministra de Educación para la Gestión Educativa
Diana Carolina Serafini Fernández
Directora General de Educación Media
Alcira Concepción Sosa Penayo
Directora de Bachillerato Científico
Ana Claudia Meza
Director de Bachillerato Técnico
Ramón Iriarte
Director Administrativo
Marcelo Esquivel
Coordinadora Unidad de Resignificación de la Educación Media:
Sara Raquel López Cristaldo
Elaboradoras:
Diana Giménez de von Lücken
Ingrid Wagener de Gauto

discreta. Los métodos combinatorios se utilizan para resolver problemas de transporte, problemas sobre confección de horarios, planes de producción y la mecanización de los mismos, así como para determinar las características genéticas en la obtención de razas de animales en laboratorios. La combinatoria también es utilizada para confeccionar y descifrar claves, así como para resolver problemas de la teoría de la información. Y también -¿por qué no?- para decidir en un futuro no muy lejano la forma más eficaz de conservar la vida en nuestro planeta.

2)Elige uno de los temas que se tratan en el texto que más te haya llamado la atención y anótalo en una hoja.
3)Comparte con tu compañero o compañera de al lado y elijan uno de los temas.
4)El tema escogido por ambos deberá ser investigado por ambos para la próxima jornada y deberán hacer un cartel sobre la investigación realizada.
5)En la próxima jornada, los trabajos serán expuestos en la "galería de cuadros".
6)No te olvides que el cuadro que presenten debe ser atractivo.

Reflexión final

1) Lee atentamente el siguiente texto.

En ocasiones se presenta la necesidad de calcular el número de maneras distintas en que un suceso se presenta o puede ser realizado. Otras veces es importante determinar la probabilidad de ocurrencia de un evento específico. En ambos casos se apela al sentido común, o se establecen métodos que permitan sistematizar los cálculos. Sin embargo, es frecuente que solamente el sentido común ayude a entender por qué se eligió un determinado procedimiento. La combinatoria es una parte de la Matemática que resulta útil para resolver este tipo de problemas en diferentes especialidades, como la Biología, la Física, la Química, la Matemática y la Lingüística, y el desarrollo de la combinatoria es un trabajo pesado y requiere paciencia.

Muchas veces los y las estudiantes no tienen las herramientas necesarias para enfrentarse a situaciones problemáticas que involucren la aplicación de conceptos de combinatoria , y en este sentido, el trabajo de profesores y profesoras es importante, porque al destacar las características que tienen los conceptos definidos o propiciar una adecuada descripción o caracterización de los mismos, está garantizando el éxito en el proceso de enseñanza – aprendizaje.

En la historia, aparecen nombres como los del célebre italiano Tartaglia, uno de los pioneros en la combinatoria, así como los de los franceses Pascal y Fermat, quienes realizaron un estudio teórico de la combinatoria, recogiendo informaciones en las mesas de juego y registrándolas estadísticamente para estudiar las leyes de regularidad bajo las cuales se regían. También se destacan los nombres de Bernoulli, Leibniz y Euler.

El rol fundamental en el desarrollo de la combinatoria, lo constituyeron las aplicaciones a los distintos tipos de juegos, sin embargo en los últimos años, la combinatoria entró en un período de intenso desarrollo relacionado con el crecimiento general del interés hacia los problemas de la matemática

Índice

Introducción 5

Reflexión 5

Matrices 6

Determinantes 17

Análisis Combinatorio 25

Reflexión final 34

Bibliografía 36

3) Cuando ha transcurrido el tiempo necesario, el facilitador da la orden de que uno de los círculos gire a la derecha o a la izquierda una determinada cantidad de lugares, de manera a cambiar de pareja.

4) Nuevamente, cada estudiante, comparte con su compañero o compañera de enfrente el problema que ha resuelto y los pasos que ha seguido para resolverlo.

5) Cuando el facilitador da la orden, todos vuelven a girar según las indicaciones dadas y realizan la misma actividad que en el ítem anterior.

Observación

Los giros se pueden repetir la cantidad de veces que el/la facilitador/a considere necesario.

La técnica puede ser también utilizada en otros momentos del proceso enseñanza - aprendizaje.

Conclusión
Analicemos detenidamente la parte b) del problema 2 del taller 3 y el problema 1 de este taller.
Los cálculos realizados en el primero fueron los siguientes:

$$_6P_4 = 6\times 5\times 4\times 3 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{720}{2} = 360.$$

En el segundo caso, como no importa el orden en que fueron seleccionados los estudiantes y éstos se ordenan de 4! maneras distintas, entonces para la solución de dicho problema, se divide 360 entre 4! = 24 y el resultado obtenido es 15.

Así, en otros problemas en los que tampoco importa el orden en que se eligen los elementos, se utiliza la fórmula de permutación de "n" elementos tomados "r" a la vez y se divide entre la cantidad de permutaciones de los "r" elementos. A esta forma de conteo se le llama **Combinación de "n" elementos tomados "r" a la vez**, se simboliza por nCr y su fórmula es

$$nCr = \frac{nPr}{r!} = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r!} \quad \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

TALLER 5

El objetivo del taller 5 es que los y las estudiantes afiancen los conocimientos adquiridos en relación al principio fundamental del conteo, la permutación y la combinación.

La técnica propuesta para el taller 5 es la de **"círculos concéntricos"**, que consiste en formar dos círculos concéntricos, cada uno de ellos con la misma cantidad de estudiantes.

1) Cada estudiante recibe un problema distinto que debe resolverlo en forma individual.

2) Una vez que todos hayan resuelto el problema que le fue asignado, cada estudiante comparte con su compañero de enfrente el problema y su solución.

Introducción

Este cuadernillo ha sido elaborado para ser utilizado en las jornadas de la Campaña de Apoyo a la Gestión Pedagógica a Docentes en Servicio – 2011, en el Área de Matemática, con los y las docentes participantes.

En cada uno de los talleres, se proponen actividades a ser desarrolladas por los y las estudiantes, a fin de lograr la introducción de matrices y determinantes y el análisis combinatorio.

Reflexión

Realizamos una lectura, en forma personal, de la frase del célebre filósofo y matemático francés René Descartes (1596-1650).

La matemática es la ciencia del orden y la medida, de bellas cadenas de razonamientos, todos sencillos y fáciles.

Luego de la lectura personal, formamos grupos de 5 personas, comentamos nuestra reflexión y escribimos una frase relacionada a la reflexión grupal.

Escribimos la frase en una cartulina y la entregamos a los facilitadores/as de la jornada, quienes armarán una "galería de cuadros" que podrá ser visitada a la hora del receso para compartir nuestras opiniones y experiencias sobre la matemática.

Matrices

TALLER 1

En el TALLER 1 se presenta un problema sencillo de la vida cotidiana y que puede ser resuelto mediante simples cálculos aritméticos. La metodología propuesta pretende que, desde un solo problema, bien seleccionado y trabajado, los y las estudiantes desarrollen las ideas principales sobre matrices, y comprendan la importancia de disponer información de manera ordenada, de modo a facilitar los cálculos y la resolución de ciertos problemas.

La confitería **"Dulces sabores"** tiene su casa central en Asunción y 3 sucursales en otras ciudades del país. Sucursal 1: Cnel. Oviedo, Sucursal 2: Encarnación y Sucursal 3: Ciudad del Este. En los cuatro locales se fabrica una gran variedad de tortas y tartas dulces.

Los ingredientes comunes a tres de los productos que fabrica son harina, azúcar, manteca y huevo. Las cantidades necesarias de cada uno de ellos son:

Bizcochuelo de chocolate con cobertura
Harina de trigo 0000: 300 g
Azúcar: 150 g
Manteca: 150 g
Huevos: 4 unidades

Torta de naranja

Harina de trigo 0000: 350 g
Azúcar: 175 g
Manteca: 150 g
Huevos: 2 unidades

Tarta de frutas (para la masa)
Harina de trigo 0000: 250 g
Azúcar: 100 g
Manteca: 100 g
Huevos: 3 unidades

Así, si observamos la parte b) del problema 2, tenemos que

$$_{30}P_4 = 30\cdot 29\cdot 28\cdot 27 = \frac{(30\cdot 29\cdot 28\cdot 27)\,26\cdot 25\cdot 24\cdot \ldots \cdot 3\cdot 2\cdot 1}{26\cdot 25\cdot 24\times\ldots\times 3\times 2\times 1} = \frac{30!}{26!}$$

Así, en general $\mathbf{nPr} = \dfrac{\mathbf{n!}}{\mathbf{(n-r)!}}$.

Si de los "n" elementos se permutaran todos los elementos como en la parte a) del problema 1, escribimos $nPn = \dfrac{n!}{(n-n)!} = \dfrac{n!}{0!} = n!$ o simplemente P_n y decimos simplemente permutación de n elementos.

TALLER 4

Con el Taller 4 se pretende que los y las estudiantes descubran el concepto de combinación. Se propone una ficha de trabajo que el/la estudiante va completando hasta llegar a una conclusión final que es compartida entre todos y todas.

Ficha

1)De un grupo de 6 estudiantes se eligen 4 para formar una comisión que participará en un evento organizado por el MEC en el marco del Bicentenario. ¿De cuántas formas distintas se pueden elegir los cuatro estudiantes?

2)Un colegio enviará a 3 estudiantes a la Ronda Regional de la Olimpiada de Matemática. Para elegir a dichos estudiantes, se tomará un examen a los 10 mejores de la Ronda Colegial. Los que ocupen los tres primeros lugares serán los seleccionados. ¿De cuántas maneras distintas se puede elegir a los estudiantes? ¿Importa el orden de la selección?.

Compara los resultados del problema 1 de este taller con los resultados del problema 2, parte b) del taller 3 y el problema 2 de este taller con los resultados del problema 3 del taller 3.

a) ¿En cuál de ellos hay menos casos?
b) ¿Por qué?

2) De los 30 estudiantes del segundo curso de un colegio hay seis estudiantes que se candidatan para ser electos como presidente, vicepresidente, secretario o tesorero del curso.
   a) ¿De cuántas maneras distintas puede conformarse la comisión directiva del curso?
   b) Si cualquiera de los 30 estudiantes puede ser electo para cualquiera de los cuatro cargos, ¿de cuántas maneras distintas puede conformarse la comisión directiva?

3) En una carrera de velocidad, participan 10 corredores. ¿De cuántas maneras distintas se puede integrar el podio (primero, segundo y tercer puesto)?

4) Con las 27 letras del alfabeto, ¿cuántos códigos diferentes de cuatro letras distintas se pueden formar?

Conclusión

Si te fijas nuevamente en los cálculos que has realizado, podrás darte cuenta que en cada uno de ellos, has utilizado el principio fundamental del conteo estudiado en el taller 2.

En algunos de los problemas has tomado todos los elementos disponibles, mientras que en otros solamente algunos de ellos. Pero sin embargo, en todos los casos, el orden en que se han colocado los elementos ha sido importante.

Cuando esto sucede, decimos que hay una **permutación de "n" elementos tomados "r" a la vez** y consiste en la acomodación (importando el orden) sin repeticiones, de "r" elementos de los "n" elementos. El número de permutaciones de "n" elementos, tomados "r" a la vez, se denota por medio de **nPr o P(n,r).**

Lo presentado anteriormente, en una fórmula, lo podemos escribir como $nPr = n\times(n-1)\times(n-2)\times(n-3)\times.....(n-r+1)$.

A fin de simplificar la expresión anterior, definimos el factorial de un número entero positivo n, denotado por n!, de la siguiente forma: $n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times(n-3)\times....3\times2\times1$ y

0! = 1.

En la tabla 1 aparecen las cantidades de tortas de cada tipo que se producen en las diferentes ciudades en una semana cualquiera del mes.

	Asunción	**Cnel. Oviedo**	**Encarnación**	**Ciudad del Este**
Bizcochuelo de chocolate	100	80	70	120
Tarta de frutas	120	50	90	100
Torta de naranja	70	60	50	80

Tabla 1

PARTE 1

1) En relación a la Tabla 1, contesta:
   a) ¿Qué cantidad de tortas de naranja se fabrican en Encarnación cada semana? _______
   b) En Ciudad del Este, ¿cuántas tartas de fruta se producen en una semana? ________
   c) ¿Cuántos bizcochuelos de chocolate se fabrican en Cnel. Oviedo cada semana? ________

2) Transcribe los datos de la tabla 1 anterior a la tabla 2.

	Bizcochuelo de chocolate	Tarta de frutas	Torta de Naranja
Asunción			
Cnel. Oviedo			
Encarnación			
Ciudad del Este			

Tabla 2

3) ¿Puedes responder las mismas preguntas que en el ítem 1?. ¿Por qué?

4) Con los datos proporcionados anteriormente, completa las siguientes tablas calculando la cantidad total de cada uno de los ingredientes que son necesarios en cada una de las ciudades y para cada una de las tortas (**en kg** la harina, el azúcar y la manteca y **en unidades** los huevos).

Asunción

	Bizcochuelo de chocolate	Tarta de frutas	Torta de naranjas
Harina de trigo			
Azúcar			
Manteca			
Huevo			

Tabla **3**

Cnel. Oviedo

	Bizcochuelo de chocolate	Tarta de frutas	Torta de naranjas
Harina de trigo			
Azúcar			
Manteca			
Huevo			

Tabla 4

Encarnación

	Bizcochuelo de chocolate	Tarta de frutas	Torta de naranjas
Harina de trigo			
Azúcar			
Manteca			
Huevo			

Tabla 5

Ciudad del Este

	Bizcochuelo de chocolate	Tarta de frutas	Torta de naranjas
Harina de trigo			
Azúcar			
Manteca			
Huevo			

Tabla 6

el primer lugar?. Si el primer lugar ya fue ocupado por uno de los cuatro, ¿cuántas personas hay disponibles para ocupar el tercer lugar?. Si ahora ya fueron ocupados el primero y el segundo lugar, ¿cuántas personas quedan disponibles para ocupar el tercer lugar?. Y por último, cuántas personas quedan disponibles para ocupar el último lugar?

Conclusión

Después de haber resuelto los cuatro problemas anteriores puedes observar que en todos los casos ha habido un evento (o situación) E_1 que podía suceder de m_1 maneras diferentes, otro evento E_2, que podía suceder de m_2 maneras diferentes, otro evento E_3, que podía suceder de m_3 maneras diferentes y así sucesivamente. Entonces el número de maneras diferentes en los que los eventos E_1, E_2, E_3,…,E_k pueden ocurrir es es m_1 x m_2 x m_3 x…..,m_k .

Este principio se conoce como **"PRINCIPIO FUNDAMENTAL DEL CONTEO".**

TALLER 3

Con el Taller 3 se pretende que los y las estudiantes descubran el concepto de permutación. Se propone una ficha de trabajo que el/la estudiante va completando hasta llegar a una conclusión final que es compartida con todos y todas.

Ficha

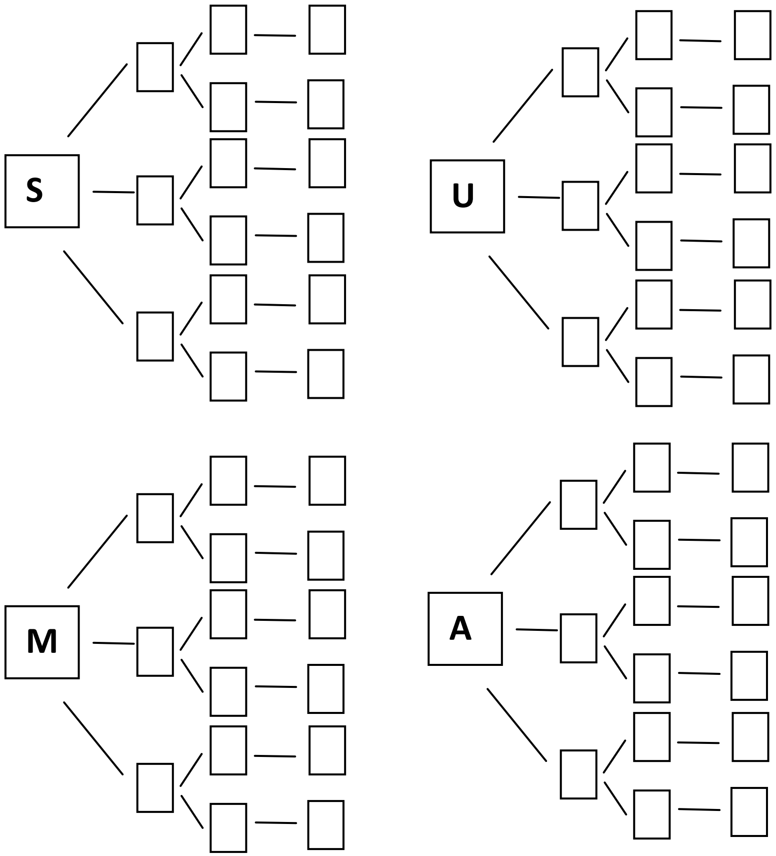
1) Se dispone de las siguientes tarjetas

1	2	7	9

a) ¿Cuántos números distintos pueden escribirse si se usan todas las tarjetas?

b) ¿Cuántos números distintos pueden escribirse si se usan solamente 3 tarjetas?

3) ¿De cuántas maneras distintas se pueden reordenar las letras de la palabra SUMA para formar otras palabras (tengan sentido o no).? Para ayudarte a responder la pregunta, completa el diagrama de árbol que aparece abajo y luego intenta escribir una expresión aritmética para la solución del problema.



4) María, Luis, Esteban y Graciela quieren sacarse una fotografía. ¿De cuántas maneras distintas pueden colocarse? Para ayudarte a resolver el problema te proponemos que pienses que cada una de las cuatro personas debe ocupar un lugar en la fila. Son cuatro posiciones como te explicamos a continuación. ¿Cuántas personas hay diponibles para ocupar

En base a los datos que completaste en las tablas, contesta las siguientes preguntas

1)¿Qué cantidad de harina debe comprarse en total en las cuatro fábricas para hacer el bizcochuelo de chocolate? ______
2)¿Qué cantidad de huevos se compran en total para hacer las tortas de naranja? ______
3)¿Qué cantidad de azúcar se compra en total para las tartas de frutas? ______
4)¿Qué cantidad de manteca se compra en total para el bizcochuelo de chocolate? ______

Si completas la tabla que está a continuación, podrás responder fácilmente las preguntas 1) a 4) anteriores, e incluso otras más. (Indica en cada casilla de la tabla las operaciones que realizas para obtener los resultados finales).

Cantidad total de ingredientes necesarios para producir las tortas en todas las fábricas del país de la empresa "Dulces sabores".

	Bizcochuelo de chocolate	**Tarta de frutas**	**Torta de naranjas**
Harina de trigo			
Azúcar			
Manteca			
Huevo			

Tabla **7**

Redacta otras preguntas que se pueden responder con la información de la tabla y **contéstalas tú mismo/a.**

PARTE 2

1) Se sabe que en la primera semana del mes en la fábrica de Ciudad del Este se produce el doble que en las otras tres semanas, pues hay más cantidad de personas que visitan la ciudad. Determina la cantidad de cada uno de los ingredientes que serán necesarios para fabricar las tres variedades de tortas. Coloca la información en una tabla como las anteriores indicando la operación aritmética que realizas para obtener cada resultado final.

Ciudad del Este

	Bizcochuelo de chocolate	**Tarta de frutas**	**Torta de naranjas**
Harina de trigo			
Azúcar			
Manteca			
Huevo			

Tabla 8

2) En la última semana del mes, en Asunción se fabrica solamente la mitad que en las otras semanas. Determina la cantidad de cada uno de los ingredientes que serán necesarios para fabricar las tres variedades de tortas. Coloca la información en una tabla como las anteriores indicando la operación aritmética que realizas para obtener cada resultado final.

Asunción

	Bizcochuelo de chocolate	**Tarta de frutas**	**Torta de naranjas**
Harina de trigo			
Azúcar			
Manteca			
Huevo			

Tabla 9

TALLER 2

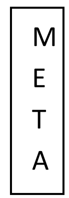
Con el Taller 2 se pretende que los y las estudiantes descubran el principio fundamental del conteo, desarrollando su creatividad y razonamiento lógico. Se propone una ficha de trabajo que el/la estudiante va completando hasta llegar a una conclusión final que es compartida con los demás compañeros. Al adquirir este principio, es importante hacer notar que puede ser aplicado en muchas otras ocasiones.

Ficha

1) La figura de abajo muestra la posición de algunas ciudades. Juan quiere viajar desde la ciudad A hasta la ciudad D.
   Desde A se puede viajar hasta B por tres caminos diferentes, desde B se puede viajar a C por dos caminos diferentes y desde C se puede viajar hasta D por tres caminos diferentes. ¿De cuántas maneras distintas puede organizar Juan su viaje desde A hasta D?
   a) Resuelve el problema en forma gráfica.
   b) Resuelve el problema mediante cálculos aritméticos.

2) Luis, Carlos y José corren una carrera de bicicletas. ¿De cuántas maneras distintas pueden ocuparse los dos primeros lugares?

Luis
Carlos
José



   a) Resuelve el problema en forma gráfica.
   b) Resuelve el problema mediante cálculos aritméticos.

b) ¿Cuántos números impares distintos se pueden formar con los tres dígitos?
c) ¿Cuántos números pares distintos se pueden formar con los tres dígitos?

3) Sofía tiene 3 blusas, 3 polleras y 2 pares de zapatos. ¿De cuántas maneras distintas se puede vestir Sofía?

4) En un campamento, se formaron dos equipos diferentes. Los equipos disponen de telas para armar banderines diferentes de modo que cada uno transmita un mensaje en código. Si el equipo A recibió telas de color rojo, anaranjado y azul, ¿cuántas banderas distintas de tres franjas horizontales puede armar, si los colores no pueden repetirse?

5) ¿Cuántas palabras distintas (tengan sentido o no) se pueden armar con las letras de la palabra AMOR?

6) Juan tiene 2 libros de lógica, uno de aritmética, uno de álgebra y uno de geometría.
a) ¿De cuántas maneras distintas puede colocar Juan los libros en un estante?
b) ¿De cuántas maneras puede colocar Juan los libros en el estante si los libros de lógica deben estar siempre juntos?
c) ¿De cuántas maneras puede colocar Juan los libros en el estante si el libro de Aritmética debe estar siempre en el extremo izquierdo y los libros de lógica pueden estar separados?

7) Un juego de una Kermesse consiste en una urna con seis pelotitas numeradas de la siguiente forma: 0, 50, 100, 500, 3 000 y 10 000. Una persona extrae tres pelotitas y el premio en guaraníes que obtiene es la suma de los números que se indican en las pelotitas que extrajo. ¿Cuántos premios distintos puede obtener?

PARTE 3

Se sabe que los costos en guaraníes de los ingredientes en cada una de las ciudades son los siguientes:

	Asunción	**Cnel. Oviedo**	**Encarnación**	**Ciudad del Este**
Harina de trigo(el kg)	3 700	3 600	3 500	3 400
Azúcar(el kg)	7 250	6 900	7 000	7 100
Manteca(el kg)	25 000	26 000	24 000	24 500
Huevo(c/u)	650	620	640	650

Tabla 10

En base a las informaciones conocidas, responde las siguientes preguntas, considerando una semana cualquiera de producción.

1) ¿Cuánto se gastaría en total, si toda la producción de bizcochuelos de chocolate se hiciera en Asunción?
2) ¿Cuánto se gastaría en total, si toda la producción de bizcochuelos de chocolate se hiciera en Cnel. Oviedo?
3) ¿Cuánto se gastaría en total, si toda la producción de bizcochuelos de chocolate se hiciera en Encarnación?
4) ¿Cuánto se gastaría en total, si toda la producción de bizcochuelos de chocolate se hiciera en Ciudad del Este?
5) ¿Cuánto se gastaría en total, si toda la producción de tarta de frutas se hiciera en Asunción?
6) ¿Cuánto se gastaría en total, si toda la producción de tarta de frutas se hiciera en Cnel. Oviedo?
7) ¿Cuánto se gastaría en total, si toda la producción de tarta de frutas se hiciera en Encarnación?
8) ¿Cuánto se gastaría en total, si toda la producción de tarta de frutas se hiciera en Ciudad del Este?
9) ¿Cuánto se gastaría en total, si toda la producción de tortas de naranja se hiciera en Asunción?
10) ¿Cuánto se gastaría en total, si toda la producción de tortas de naranja se hiciera en Cnel. Oviedo?
11) ¿Cuánto se gastaría en total, si toda la producción de tortas de naranja se hiciera en Encarnación?
12) ¿Cuánto se gastaría en total, si toda la producción de tortas de naranja se hiciera en Ciudad del Este?

TEORÍA

Definición: Una matriz es un conjunto de elementos dispuestos ordenadamente en filas y columnas.

A la disposición horizontal le llamamos filas y a la disposición vertical le llamamos columnas.
En la Tabla 1,
pertenecen a la **fila 1** los números: 100 , 80 ,70 y 120
pertenecen a la **fila 2** los números: 120 , 50, 90 y 100
pertenecen a la **fila 3** los números: 70 , 60, 50 y 80
pertenecen a la **columna 1** los números: 100 , 120 y 70
pertenecen a la **columna 2** los números: 80 , 50 y 60
pertenecen a la **columna 3** los números: 70 , 90 y 50
pertenecen a la **columna 4** los números: 120 , 100 y 80

Para identificar a los elementos de una matriz les nombramos con alguna letra minúscula y un subíndice formado por dos números, el primero representa la fila a la cual pertenece el elemento y el segundo representa la columna a la que pertenece el elemento.
Así tenemos entonces que en la tabla 1, los números dados estarían representados por:

$a_{11} = 100$	$a_{12} = 80$	$a_{13} = 70$	$a_{14} = 120$
$a_{21} = 120$	$a_{22} = 50$	$a_{23} = 90$	$a_{24} = 100$
$a_{31} = 70$	$a_{32} = 60$	$a_{33} = 50$	$a_{34} = 80$

La matriz se representa mediante una letra mayúscula y los valores dispuestos ordenadamente se colocan dentro de un paréntesis o corchete, como mostramos abajo.

Elemento de la **fila 1**, **columna 2**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

Elemento de la **fila 2**, **columna 3**

Elemento de la **fila 3**, **columna 2**

TALLER 1

En el TALLER 1 se presentan problemas sencillos que pueden ser resueltos mediante simples cálculos aritméticos. La metodología propuesta es la técnica de estaciones, la cual permite introducir el tema de una manera lúdica, pero a la vez desafiante.

Metodología

1)Se distribuyen problemas que se resuelven por combinatoria y materiales de simple manipulación en espacios que llamamos estaciones.
2)Los estudiantes resuelven los problemas utilizando los materiales disponibles en cada lugar.
3)El tiempo de permanencia en cada estación será determinado por el facilitador.
4)Cuando el facilitador indica, los grupos deben cambiar de estación y resolver el problema que se presenta en la misma.
5)Cuando todos los grupos hayan recorrido todas las estaciones, cada grupo expone la solución del problema que han resuelto en la última estación visitada.

Observación: Como todas las personas han recorrido todas las estaciones, todos tienen conocimiento de los problemas y en el momento de la presentación de los grupos se fomenta el debate entre los estudiantes, de manera a promover también desde el aula de matemática la discusión y el debate.

Problemas propuestos para el Taller 1

1)Se dispone de cuatro frutas diferentes: manzana, naranja, banana y melón. Si se desea hacer una ensalada de frutas utilizando únicamente tres de ellas, ¿cuántas variedades de ensaladas se pueden hacer?

2)Dados los dígitos 2, 3 y 8.
a)¿Cuántos números de tres cifras distintas se pueden formar?

5) Si se suma una fila o una columna de una matriz cuadrada a otra fila o columna multiplicada por un número cualquiera, el determinante de la matriz no se altera.
6) Si los elementos de una matriz cuadrada situados a un mismo lado de la diagonal son todos nulos, el determinante de la matriz será igual al producto de los elementos de la diagonal principal.
7) El determinante de una matriz cuadrada es igual al determinante de su transpuesta.

Se llama **orden de una matriz A** al producto indicado del número de filas y el número de columnas. Así, una matriz de m filas y n columnas, tiene orden m x n. Esa matriz puede denotarse por $A_{mxn.}$

Cuando construiste la Tabla 2 a partir de la Tabla 1, has construido lo que se conoce como la **transpuesta de una matriz**, que consiste en intercambiar filas por columnas. Si observas nuevamente las tablas 1 y 2, podrás darte cuenta que la primera es de orden 3 x 4 y la segunda es de orden 4 x 3.

El trabajo que has realizado en la PARTE 1 al construir la tabla 7 se conoce como **suma de matrices.**

En la PARTE 2**,** en las tablas 8 y 9, has realizado lo que se conoce como **multiplicación de una matriz por un escalar.** En el primer caso, el escalar fue 2 y en el segundo ½.

Según lo que has experimentado en la resolución del problema, contesta las siguientes preguntas:

1)¿Cómo se realiza la suma de matrices?
2)Puedes sumar una matriz de orden 2 x 3 con una matriz de orden 3 x 2? ¿Por qué?
3)¿Qué condición deben cumplir dos matrices para realizar la operación de adición entre ellas?

Conclusión: Para sumar dos matrices A y B, se suman sus elementos correspondientes. La condición necesaria para sumar dos matrices es que sean del mismo orden.

PARTE 4

Observa que si se construyen dos tablas como las que están a continuación y se multiplican y suman los elementos según el orden que te indicamos, se obtienen los mismos resultados que obtuviste cuando respondiste las 12 preguntas anteriores de la PARTE 3.

Observa que la primera tabla es la transpuesta de la matriz correspondiente a la tabla 7.

	Harina	**Azúcar**	**Manteca**	**Huevo**
Bizcochuelo	$a_{11} = 111$	$a_{12} = 55{,}5$	$a_{13} = 55{,}5$	$a_{14} = 1\,480$
Tarta de frutas	$a_{21} = 102$	$a_{22} = 45$	$a_{23} = 42$	$a_{24} = 960$
Tarta de naranjas	$a_{31} = 84$	$a_{32} = 40{,}25$	$a_{33} = 35{,}5$	$a_{34} = 590$

	Asunción	**Cnel. Oviedo**	**Encarnación**	**Ciudad del Este**
Harina	$b_{11} = 3700$	$b_{12} = 3\,600$	$b_{13} = 3\,500$	$b_{14} = 3\,400$
Azúcar	$b_{21} = 7\,250$	$b_{22} = 6\,900$	$b_{23} = 7\,000$	$b_{24} = 7\,100$
Manteca	$b_{31} = 25\,000$	$b_{32} = 26\,000$	$b_{33} = 24\,000$	$b_{34} = 24\,500$
Huevo	$b_{41} = 650$	$b_{42} = 620$	$b_{43} = 640$	$b_{44} = 650$

Para responder la primera pregunta has realizado las siguientes operaciones $a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + a_{14}b_{41}$.

Para responder la segunda pregunta has realizado las siguientes operaciones $a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} + a_{14}b_{42}$.

Para responder la tercera pregunta has realizado las siguientes operaciones $a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} + a_{14}b_{43}$.

Para responder la cuarta pregunta has realizado las siguientes operaciones $a_{11}b_{14} + a_{12}b_{24} + a_{13}b_{34} + a_{14}b_{44}$.

Para responder la quinta pregunta has realizado las siguientes operaciones $a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} + a_{24}b_{41}$.

Para responder la sexta pregunta has realizado las siguientes operaciones $a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} + a_{24}b_{42}$.

5) $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$; $\det B = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 10 & 1 & -8 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

Observa que la segunda fila de la matriz B se obtuvo multiplicando la primera fila por 2 y luego el resultado se ha sumado con la segunda fila de la misma.

Conclusión: ____

6) $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

Observa que los elementos que están por encima y por debajo de la diagonal principal son todos nulos

Conclusión: ____

7) $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & -4 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$; $\det A^t = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 3 \end{vmatrix}$

Conclusión: ____

Algunas propiedades de los determinantes son las siguientes:

1) Si los elementos de una fila o columna de una matriz son todos nulos, entonces el determinante de la matriz es nulo.
2) Si los elementos de dos filas (o columnas) de una matriz cuadrada son iguales, su determinante es nulo.
3) Si se cambian de posición entre sí dos filas (o columnas) de una matriz cuadrada, el determinante de la nueva matriz es igual al anterior con signo contrario.
4) Si se multiplican todos los elementos de una fila (o columna) por una constante "k", entonces el determinante de la nueva matriz es igual al anterior, multiplicado por "k".

TALLER 3

En el Taller 3 se aplica la definición de determinante de una matriz o la regla de Sarrus para descubrir las propiedades de los determinantes.

Propiedades de los determinantes

Calcula el determinante de cada una de las matrices que aparecen a continuación. Observa la característica que presenta cada una de ellas y saca una conclusión.

1) $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$; $\det B = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -7 \\ -1 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

Observa que la matriz A tiene una fila de ceros y la matriz B tiene una columna de ceros.

Conclusión: ____

2) $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -7 \\ 3 & 2 & -7 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$; $\det B = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ -1 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

Observa que la matriz A tiene dos filas iguales y la matriz B tiene dos columnas iguales.

Conclusión: ____

3) $\det A = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 7 \\ 1 & 7 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$; $\det B = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 7 & -4 \\ -3 & -2 & 7 \end{vmatrix}$

Observa que los elementos de la primera y tercera fila se han intercambiado.

Conclusión: ____

4) $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$; $\det B = \begin{vmatrix} 9 & 6 & -6 \\ 4 & -3 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

Observa que la primera fila de la matriz A se ha multiplicado por 3.

Conclusión: ____

Para responder la sétima pregunta has realizado las siguientes operaciones $a_{21}\,b_{13} + a_{22}\,b_{23} + a_{23}\,b_{33} + a_{24}\,b_{43}$.

Para responder la octava pregunta has realizado las siguientes operaciones $a_{21}\,b_{14} + a_{22}\,b_{24} + a_{23}\,b_{34} + a_{24}\,b_{44}$.

Para responder la novena pregunta has realizado las siguientes operaciones $a_{31}\,b_{11} + a_{32}\,b_{21} + a_{33}\,b_{31} + a_{34}\,b_{41}$.

Para responder la décima pregunta has realizado las siguientes operaciones $a_{31}\,b_{12} + a_{32}\,b_{22} + a_{33}\,b_{32} + a_{34}\,b_{42}$.

Para responder la undécima pregunta has realizado las siguientes operaciones $a_{31}\,b_{13} + a_{32}\,b_{23} + a_{33}\,b_{33} + a_{34}\,b_{43}$.

Para responder la duodécima pregunta has realizado las siguientes operaciones $a_{31}\,b_{14} + a_{32}\,b_{24} + a_{33}\,b_{34} + a_{34}\,b_{44}$.

Observa detenidamente cómo se han realizado las operaciones.

Se han multiplicado ordenadamente los elementos de cada fila de la primera matriz por los elementos de las columnas de la segunda matriz y se han ido sumando dichos productos.

A esa operación que se ha realizado se le conoce como **"producto de matrices".**

¿Cuál crees que es la condición necesaria para que pueda calcularse el producto de dos matrices?

¿Cuál de los productos entre las siguientes matrices crees que será posible realizar? Justifica y efectúa.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 4\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 5 & -1 & 2\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}-4\\ 2\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 4 & 3\\ 2 & -4\end{pmatrix}\qquad E=\begin{pmatrix}3 & -5 & 2\\ -2 & 5 & 3\\ 6 & -1 & 1\end{pmatrix}\qquad F=\begin{pmatrix}3 & -2 & 4\end{pmatrix}$$

a) A x B ___ b) A x C___ c) A x D___

d) D x C___ e) E x B___ f) F x D___

g) B x E___ h) F x E___ i) C x F___

Para multiplicar dos matrices es necesario que el número de columnas de la primera matriz sea igual al número de filas de la segunda matriz. El orden de la nueva matriz está dado por el número de filas de la primera matriz y el número de columnas de la segunda matriz.

Algunas matrices especiales y sus características

- **Matriz fila:** es la matriz que tiene una sola fila y n columnas.
- **Matriz columna**: es la matriz que tiene una sola columna y m filas.
- **Matriz cuadrada:** es la matriz cuyo número de filas es igual al número de columnas.
  En una matriz cuadrada, los elementos a_{ij} donde i = j forman una diagonal denominada **diagonal principal**. A la otra diagonal se le llama **diagonal secundaria**.
- **Matriz diagonal:** es la matriz cuadrada cuyos elementos no pertenecientes a la diagonal principal son todos nulos.
- **Matriz unidad de orden n (matriz identidad):** es la matriz cuadrada en la cual todos los elementos de la diagonal principal son iguales a uno y los demás elementos son todos nulos.

Luego de la teoría correspondiente a matrices, se trabaja con fichas de problemas preparadas por el/la docente.

PARTE 4

Existe una regla práctica, conocida como **regla de Sarrus**, que permite calcular el determinante de una matriz cuadrada de orden 3.

Dada la matriz cuadrada A_{3x3} , se repite hacia abajo la primera y la segunda fila de la matriz como indicamos a continuación. Se multiplican los términos entre sí, siguiendo las líneas en diagonal y se asocian signos "+" a los productos de la diagonal principal y las paralelas a ella y signo "-" a los de la diagonal secundaria y a las paralelas a ella.

$$\det A=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\\ a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}=$$

$$a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}-a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{33}-a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}-a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}=$$

Aplica la regla de Sarrus para calcular el determinante de las siguientes matrices.

a) $\det A=\begin{vmatrix}8 & 3 & 1\\ 5 & 2 & -4\\ -2 & 1 & 0\end{vmatrix}$; b) $\det B=\begin{vmatrix}2 & 2 & -7\\ 3 & 4 & -3\\ -2 & 1 & 5\end{vmatrix}$

C) $\det C=\begin{vmatrix}2 & 8 & 4\\ -5 & 6 & -4\\ 3 & 7 & 3\end{vmatrix}$; d) $\det D=\begin{vmatrix}0 & 12 & 7\\ 4 & 9 & -6\\ -1 & 1 & 8\end{vmatrix}$

PARTE 2

Considerando la matriz A de la PARTE 1 y el menor complementario de cada elemento de A, se llama cofactor de a_{ij} al número real que se obtiene al multiplicar $(-1)^{i+j}$ por D_{ij} y lo representamos por A_{ij}. Así, $A_{ij} = (-1)^{i+j} \times D_{ij}$.

Calcula el cofactor de cada uno de los elementos de la matriz $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 4 & 7 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

PARTE 3

Dada la matriz cuadrada S de orden 3, se define como determinante de la matriz el número

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{33} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} =$$

$$a_{11}\left(a_{22} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23}\right) - a_{12}\left(a_{21} \cdot a_{33} - a_{31} \cdot a_{23}\right) + a_{13}\left(a_{21} \cdot a_{32} - a_{31} \cdot a_{22}\right) =$$

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\det A = a_{11} A_{11} - a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}}$$

Determinantes

TALLER 1

En el Taller 1 se introduce el concepto de determinante de una matriz cuadrada de orden 2 a partir de la solución de sistemas de ecuaciones.

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones aplicando el método de reducción.

a) $\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 6x - 4y = 14 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 6x - 4y = 10 \end{cases}$

¿Qué conclusión puedes sacar en cada uno de los casos?
Observa detalladamente lo que sucede al desarrollar la solución de cada uno de ellos.

En el caso del sistema $\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$, los pasos que se han realizado para obtener la solución son los siguientes:

1) Para eliminar la variable "y", se multiplica la primera ecuación por 1 y la segunda por -5 y entonces se obtiene $\begin{cases} 1.3x + 1.5y = 1.1 \\ -5.2\ x - 5.1\ y = -5.3 \end{cases}$

2) Al sumar miembro a miembro ambas ecuaciones nos queda $1.3x - 5.2\ x = 1.1 - 5.3$.

3) Al factorizar "x" obtenemos $(1.3 - 5.2)x = 1.1 - 5.3$.

4) Al despejar "x", resulta: $x = \frac{1.1 - 5.3}{1.3 - 5.2} = \frac{1-15}{3-10} = \frac{-14}{-7} = 2$

5) Trabajando de manera análoga para encontrar el valor de "y", se llega a la expresión $x = \frac{3.3 - 2.1}{1.3 - 5.2} = \frac{9-2}{3-10} = \frac{7}{-7} = -1$

Se puede notar que la expresión numérica 1.3 – 5.2 aparece en ambos casos y es de destacar que el valor de dicha expresión determina el carácter del sistema y por lo tanto recibe el nombre de **determinante.**

En general, en la ecuación $\begin{cases} ax + by = r \\ cx + dy = s \end{cases}$ tenemos que el determinante está dado por $a \cdot d - b \cdot c$

Si $a \cdot d - b \cdot c \neq 0$, el sistema tiene una **solución única**.

Si $a \cdot d - b \cdot c = 0$, $a \cdot s - r \cdot c = 0$ y $r \cdot d - b \cdot s = 0$, entonces **"a", "b" y "r"** son proporcionales a **"c", "d" y "s".** Bajo estas condiciones, **el sistema tiene infinitas soluciones** y un ejemplo de ello es el sistema b) $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 6x - 4y = 14 \end{cases}$; con las razones de proporcionalidad $\frac{3}{6} = \frac{-2}{-4} = \frac{7}{14}$.

Si x =1, entonces 3.1 – 2y = 7 → y = – 2 .

Otra solución posible es para x = 2, entonces $y = -\frac{1}{2}$.

De este modo para cualquier valor de x que escojamos obtendremos un valor para y.

Si $a \cdot d - b \cdot c = 0$, $a \cdot s - r \cdot c \neq 0$ y $r \cdot d - b \cdot s \neq 0$, entonces **"a"** y **"b"** son proporcionales a **"c"** y **"d"**, pero esta proporcionalidad no se extiende a **"r"** y **"s"**, y por lo tanto, el sistema no tiene solución y un ejemplo de ello es el sistema

c) $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 6x - 4y = 10 \end{cases}$; con $\frac{3}{6} = \frac{-2}{-4} \neq \frac{7}{10}$.

Para obtener el valor del denominador en cada caso se ha calculado la diferencia entre los productos de los elementos de la diagonal principal y los de la diagonal secundaria.

Conclusión

Dada una matriz cuadrada de orden 2, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, se llama **determinante asociado a la matriz A,** al número real obtenido por la diferencia $a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$.

Se simboliza por det A = $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$.

TALLER 2

En el Taller 2 se define el determinante de una matriz cuadrada de orden 3 a partir de los cofactores de una matriz.

PARTE 1

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ se llama menor complementario D_{ij} relativo a un elemento a_{ij} de A al determinante asociado a la matriz cuadrada de orden 2 que se obtiene a partir de A, eliminando la fila y la columna a la que pertenece el elemento a_{ij}.

Así tenemos por ejemplo $D_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ y $D_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$.

Determina los menores complementarios de cada uno de los demás elementos de la matriz A