2.3 UNIDAD 3 Derivadas

2.3.1. Capacidades

- Formula y resuelve situaciones problemáticas en las que se aplique el concepto de derivada.
- Determina la derivada de distintos órdenes de funciones algebraicas, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.
- Interpreta las características de una función, usando derivadas
- Formula y resuelve problemas de optimización empleando derivadas.

2.3.2. Temas

- Derivada como pendiente de la recta tangente en un punto.
- Derivada como límite del cociente incremental.
- Reglas prácticas de derivación.
- Regla de la cadena.
- Derivadas sucesivas.
- Regla de L´Hopital.
- Rectas tangente y normal en un punto.
- Criterios de la primera y la segunda derivada.
- Puntos críticos (máximo y mínimo).
- Puntos de inflexión.
- Concavidad y convexidad.
- Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
- Asíntotas.
- Representación gráfica de la derivada de una función.

2.3.3. Evaluación diagnóstica

Encuentro las estrategias para resolver

1. Verifico el siguiente límite:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x^5 + 3x^4 + 3}{x^4 - 2x^3 + x} = \infty$$

2. Calculo el siguiente límite:

$$\lim_{n \to 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{9}{x^2-9} \right)$$

Respuesta: $\frac{1}{6}$

2.3.4. Página de apertura

Como actividad inicial proponemos la lectura y un breve comentario sobre «La Notación actual de la derivada». Aprovechando la información se podría pedir a los alumnos y las alumnas que investiguen en Internet u otros medios sobre los demás aportes de Isaac Newton, Gottfried Leibniz y Leonardo Euler.

Se puede visitar las páginas web:

http:// es.wikipedia.org/wiki/Isaac Newton

http:// www.divulgamat.net/weborriak/Histori/MateOspetsuak/Leibniz.asp

http:// euler.ciens.usv.ve/matemáticos/euler.html

2.3.5. Abordaje de los temas

Esta unidad podemos presentar analizando con los estudiantes que todo fenómeno en la naturaleza y en la sociedad está sujeto a cambios. Como ejemplos podemos nombrar: la población de un país varía con los años, las temperaturas también varían en el transcurso del tiempo, etc.

El estudio de estas variaciones nos llevará a construir uno de los conceptos más importantes del Cálculo: la derivada.

La derivada como tasa de variación o razón de cambio, nos plantea el texto a través de un ejemplo de la variación de la velocidad, o razón de cambio del desplazamiento con respecto al tiempo.

Para ello partimos del concepto de velocidad media:

$$V = \frac{\text{variación de espacio}}{\text{variación de tiempo}} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Calculamos la misma en varios intervalos de tiempo, graficamos la función, analizamos su comportamiento y concluimos con la definición de T.V.M.

Luego aplicamos la T.V.M. en funciones cúbicas, lineales y cuadráticas, graficamos las mismas y analizamos cada una de ellas.

El concepto de derivada de una función en un punto se presenta con los estudios de una función lineal y otra cuadrática. En ellas se observa, para la función lineal el cociente incremental $\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$, es decir, es constante cualquiera sea el valor de x; no así la función cuadrática $f(x) = x^2$, donde a partir de un valor x_0 es $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$.

Si damos a x_0 el valor 1 y a Δx valores cada vez más pequeños, vemos que el cociente incremental tiende a 2. De aquí se concluye que: «el límite del cociente incremental cuando Δx tiende a cero, es la derivada de una función».

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Consideramos conveniente que el estudiante grafique la función dada y su función derivada, con el propósito de que comprenda que la derivada de una función es otra función.

Las reglas prácticas de derivación o Álgebra de las derivadas; la derivada de una función compuesta, de funciones inversas y derivadas sucesivas son explicadas con ejemplos resueltos, aclarando el procedimiento seguido, de modo que el estudiante pueda llegar a la solución correcta de todas las actividades propuestas.

Es importante que los alumnos y las alumnas apliquen el concepto de derivada en la Física. El texto presenta la interpretación física de la derivada.

En esta unidad podemos trabajar como tema trasversal la educación democrática, se muestra una señal de tránsito que indica la pendiente de una carretera. Proponemos conversar sobre el respeto de las señales de tránsito realizando estas preguntas entre otras:

1. ¿Para qué sirven las señales de tránsito?
2. Cita las señales de tránsito que conoces. ¿Qué indica cada una de ellas?
3. ¿Cuáles son las instituciones encargadas de la señalización de las calles y rutas?
4. ¿Qué acciones podemos realizar para concienciar el cumplimiento de las leyes de señalización?

Las actividades de retroalimentación se pueden realizar en grupos utilizando la estrategia del aprendizaje cooperativo.

El aprendizaje cooperativo

El aprendizaje cooperativo es una técnica válida que favorece la interacción entre los y las estudiantes. Exige por parte de los mismos, la aceptación de la diversidad como fuente de construcción y aprendizaje. Enriquece el trabajo con una participación real de todos los involucrados, desarrolla la capacidad de negociación y el respeto por las diferencias. No se trata de una simple suma de aportes, sino de una constante retroalimentación que va rescatando los conocimientos, la experiencia, el bagaje cultural que posee cada sujeto. Facilita la confrontación de puntos de vista, argumentaciones, tomar decisiones conjuntas y ofrecer posibles soluciones para los conflictos que se presenten.

2.3.6. Algunos indicadores de evaluación

- Calcula la derivada de una función f(x) en intervalos señalados.
- Calcula la derivada de una función f(x) en intervalos señalados.
- Elabora conclusiones sobre tasa de variación media a partir de gráficos.
- Utiliza la regla práctica de derivación de una suma (o diferencia) de funciones.
- Utiliza la regla práctica de derivación de un producto (o cociente) de funciones.
- Aplica la derivada en la determinación de la pendiente de la recta tangente a la función en un punto dado.
- Halla la derivada de la función trigonométrica indicada..
- Determina la tercera derivada de una función dada.
- Asume con responsablidad el trabajo realizado.

2.3.7. Actividades complementarias

Para este apartado sugerimos algunas actividades, que pueden ser propuestas para un trabajo grupal. Dos de ellas pueden ser desarrolladas en la sala de computación.

A 1 Propuesta de actividad

TEMA Tasa de variación media.

OBJETIVO Interpreto la razón media de cambio de una función en un intervalo dado.

DESARROLLO Planteamos las siguientes situaciones problemáticas:

- Las gráficas representan la variación del espacio recorrido respecto al tiempo, de dos partículas que se mueven de manera diferente, sabiendo que el espacio se mide en metros y el tiempo en segundos.

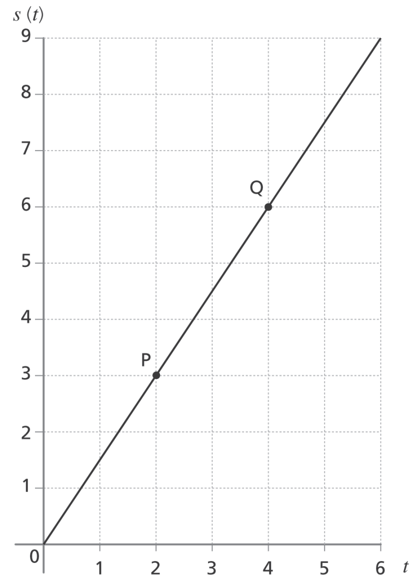


Gráfico 1

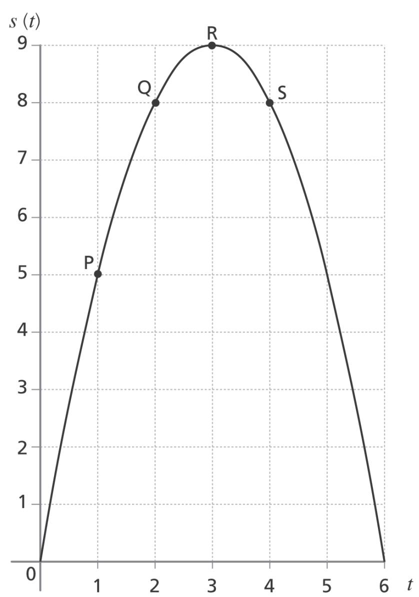


Gráfico 2

¿Cuál es la velocidad media de la partícula de la gráfica 1, cuando se mueve de la posición P a la posición Q?

¿Cuánto mide el ángulo de inclinación de la recta?

¿Cuál es la velocidad media de la partícula de la gráfica 2, cuando se mueve de la posición P a la posición Q, de Q a R y de R a S?

Solucionamos

Primero, consideramos la gráfica 1.

Las coordenadas de los puntos P y Q son:

P (2, 3) y Q (4, 6)

$$Vm = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(6-3)}{(4-2)} = \frac{3}{2} = 1{,}5\ \frac{m}{s} \text{ velocidad media}$$

La velocidad media de la partícula entre P y Q es 1,5 m/s.

Sabiendo que la tangente del ángulo de inclinación coincide con la pendiente de la recta porque la velocidad media de la partícula es la variación de la velocidad entre los puntos P y Q:

$tg\alpha = m \rightarrow tg\alpha = 1{,}5 \rightarrow \alpha = 56^{o}\ 18'\ 36''$

Segundo, consideramos la gráfica 2.

Obtenemos la velocidad media de la partícula:

de P a Q: P (1, 5) y Q (2, 8)

$$Vm = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(8-5)}{(2-1)} = 3\ \frac{m}{s} \longrightarrow$$ La función es creciente en este intervalo porque la Vm > 0.

De Q a R: Q (2, 8) y R (3, 9)

$$Vm = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(9-8)}{(3-2)} = 1\ \frac{m}{s} \longrightarrow$$ La función es creciente en este intervalo porque la Vm > 0.

De R a S: R (3, 9) y S (4, 8)

$$Vm = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(8-9)}{(4-3)} = -1\ \frac{m}{s} \longrightarrow$$ La función es creciente porque la Vm < 0.

Concluimos que la función crece y decrece según los intervalos que se consideran.

EN LA SALA DE INFORMÁTICA

A 2 Propuesta de actividad

TEMA Tasa de variación media.

OBJETIVO Utilizo el concepto de derivada de funciones en el análisis y resolución de problemas.

Realizo actividades que favorezcan el desarrollo del pensamiento crítico y reflexivo.

MATERIAL Un software que permita graficar.

DURACIÓN 80 minutos

ACTIVIDAD 1

Relacionamos con ciencias

En la tabla de abajo se registra el resultado obtenido en un laboratorio de ciencias sobre el crecimiento de una plántula de poroto (los valores consignados son aproximados):

t (horas)	0	1	2	3	4	5
S(**t**) (cm)	2	3	4	5	6	7

- Con la información dada en la tabla:
  a. Determino la función que relaciona el crecimiento con el tiempo transcurrido y la relación existente entre las dos variables. Luego grafico.
  b. ¿Hay algún intervalo de tiempo en el cual el crecimiento sea más rápido?
  c. Calculo la velocidad media de crecimiento en los intervalos [2, 1] y [4, 5].
  d. ¿Cuál es la tasa de variación instantánea del crecimiento, en cualquier instante?
  e. ¿Qué relación existe entre la variación instantánea de crecimiento en cualquier instante t y la velocidad media en cualquier intervalo?

DESARROLLO

a. De la tabla extraemos los puntos $P_1(1, 3)$ y $P_2(2, 4)$ y calculamos la ecuación de la recta que pasa por esos puntos.

- Hallamos primero la pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-3}{2-1} = 1$$

- Escribimos la ecuación punto-pendiente:

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 3 = 1(x - 1) \longrightarrow y = x + 2$

$\boxed{S(t) = t + 2} \longrightarrow$ Es la función del crecimiento en relación al tiempo.

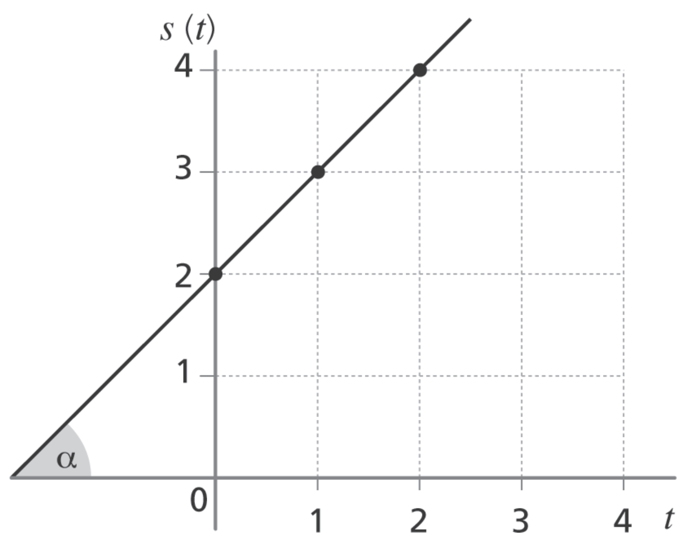
- La variable dependiente es S(t) y la variable independiente es t.

Para graficar la función encontrada, en la computadora seguimos estos pasos:

1. Copiamos la tabla dada al inicio de la actividad en una hoja de cálculo.

	A	B
1	X (t horas)	Y(S(t))
2	0	2
3	1	3
4	2	4
5	3	5
6	4	6
7	5	7

2. Seleccionamos la tabla anterior e insertamos un gráfico de dispersión con puntos de datos conectados por líneas para la misma:
   - Hacemos clic en Insertar en la barra de menú y en gráfico.
   - Seleccionamos el tipo y subtipo de gráfico (dispersión - con puntos de datos conectados por líneas).
   - Finalizamos.



b. Observando la tabla podemos deducir que el crecimiento es de 1 cm cada hora y éste se mantiene constante.

c. $Vm = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1} = \frac{4-3}{2-1} = \frac{1}{1} = 1$ m/s en el [1, 2]

$Vm = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{7-6}{5-4} = \frac{1}{1} = 1$ m/s en el [4, 5]

d. Para hallar la tasa de variación instantánea de crecimiento en cualquier instante, aplicamos el concepto de derivada:

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

como $y = f(x) = x + 2,\ y' = 1$ Tasa de variación instantánea.

Con la siguiente demostración nos damos cuenta de que cualquiera sea el punto que tomamos de la recta, la tasa de variación instantánea va creciendo.

$$\lim_{h \to 0} f(x) = \lim_{h \to 0} (x + 2) = 2$$

$$\lim_{h \to 3} (x + 2) = 3 + 2 = 5$$

Concluimos: La velocidad instantánea es positiva por lo tanto existe crecimiento de la función.

e. La tasa de variación instantánea de crecimiento en cualquier instante t es igual a la velocidad media en ese instante.

$TVM = \frac{\Delta S}{\Delta t} = 1$ TVI $y' = 1$

ACTIVIDAD 2

Relacionamos con Física

La siguiente actividad para trabajar con la computadora presenta un cúmulo muy importante de conceptos y procesos, por ello entendemos que no es un problema para comenzar la unidad sino más bien para utilizar al término de la misma y así evaluar cuánto se ha logrado.

- Un cuerpo que es lanzado hacia arriba se mueve de modo que su posición después de t segundos está dada por la ley o función $S(t) = -2t^2 + 12t + 9$ metros.
  a. Represento gráficamente en la computadora.
  b. Determino la tasa de variación media de cambio del espacio recorrido con respecto al tiempo transcurrido durante los primeros 5 segundos, en intervalos de 1 segundo de amplitud.
  c. ¿Cuál es la razón de cambio de desplazamiento a los 2 segundos de iniciado el movimiento?
  d. ¿Qué nos indica la función derivada en un punto?

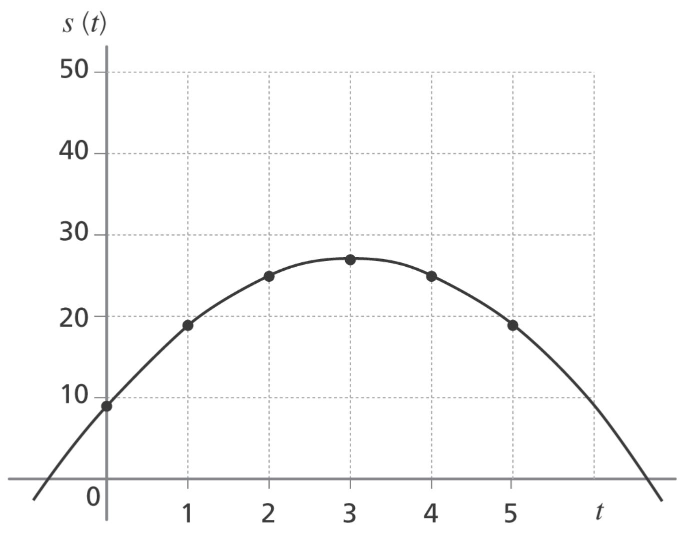
DESARROLLO

a. Para graficar la función encontrada en la computadora seguimos estos pasos:

1. Construimos y copiamos la siguiente tabla en una hoja de cálculo.

	A	B
1	X (t horas)	Y(S(t))
2	0	9
3	1	19
4	2	25
5	3	37
6	4	25
7	5	19
8	6	9

2. Seleccionamos la tabla anterior e insertamos un gráfico de dispersión de la siguiente manera:
   - Hacemos clic en Insertar en la barra de menú y en gráfico.
   - Seleccionamos el tipo y subtipo de gráfico (dispersión - con líneas suavizadas y sin marcadores de datos).
   - Finalizamos.



b. Hallamos la T.V.M. en los intervalos: [1, 2] [2, 3] [3, 4] [4, 5].

$$\text{TVM } [1, 2] = \frac{25 - 19}{2 - 1} = \frac{6}{1} = 6 > 0$$ Es positiva, la función es creciente.

$$\text{TVM } [2, 3] = \frac{27 - 25}{4 - 3} = \frac{2}{1} = 2 > 0$$ Es positiva, la función es creciente.

$$\text{TVM } [3, 4] = \frac{25 - 27}{4 - 3} = \frac{-2}{1} = -2 < 0$$ Es positiva, la función es decreciente.

$$\text{TVM } [4, 5] = \frac{19 - 19}{5 - 4} = \frac{-6}{1} = -6 < 0$$ Es positiva, la función es decreciente.

c. A los 2 segundos de iniciado el movimiento, la razón de cambio es 2; la función crece hasta llegar al punto máximo (3, 27).

d. Su función primitiva es: $S(t) = -2t^2 + 12t + 9$

La función derivada es: $S'(t) = -4t + 12$

Si el tiempo $t = 3$ segundos reemplazamos en

$S'(t) = -4 \cdot 3 + 12 = -\cancel{12} + \cancel{12} = 0$;

la pendiente es cero y la recta tangente es paralela a la recta $y = 0$ (eje x).

Por tanto podemos decir que la derivada de una función en un punto x_0, representa la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto.

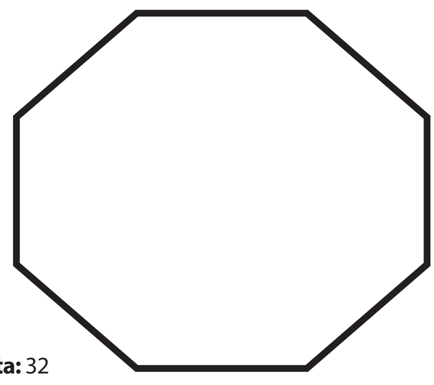
Graficamos también utilizando la computadora.

3. Aplico la regla correspondiente para derivar la siguiente función:

$$f(x) = \frac{e^x + 1}{x}$$

Respuesta: $y = \frac{xe^x\,x - e^x - 1}{x^2\,x}$

4. ¡Qué lío es! Cuento el número de intersecciones de las diagonales de un octógono regular.



Respuesta: 32

2.3.8. Sugerencias didácticas

2.3.8.1. Proceso de desarrollo de capacidades

Comprende el enunciado del problema referido a maximización o minimización de funciones en diversos contextos.

1. Leer el enunciado del problema.
2. Extraer los datos del problema.
3. Identificar la incógnita.
4. Reconocer si la condición es suficiente para determinar la incógnita.
5. Estimar el resultado.
6. Aceptar opiniones del grupo al analizar el enunciado de un problema para tomar decisiones.

2.3.8.2. Página de apertura

Basándonos en los conocimientos previos de los alumnos y las alumnas proponemos un resumen sobre las funciones cuadráticas, cúbicas y cuárticas a través de la representación de las mismas. Identificamos los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los puntos máximos y mínimos, la concavidad y convexidad que presentan.

2.3.8.3. Abordaje de los temas

A través de ejemplos resueltos presentamos la regla de L'Hôpital para el cálculo de límites de funciones racionales indeterminadas $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$.

Trabajamos el análisis de funciones a través de ejemplos utilizando recursos gráficos y derivando determinamos los puntos máximos, mínimos y de inflexión primero con funciones cuadráticas, luego con funciones cúbicas y cuárticas, y por último con funciones trigonométricas.

En los ejemplos resueltos se puede visualizar la metacognición mediante preguntas formuladas en la última etapa de resolución como:

¿Pudimos aplicar las reglas estudiadas sin dificultad?

¿Consideramos que el resultado obtenido se ajusta al pedido del problema? ¿Por qué?

¿Consideramos lógica la solución obtenida? ¿Por qué?

Orientaciones importantes

Para que el estudiante incorpore y use eficientemente la metacognición, es importante observarlo y retroalimentarlo durante el proceso de resolver problemas.

La discusión entre grupos pequeños de estudiantes al resolver problemas puede ayudar al desarrollo de la competencia.

Schoenfeld recomienda que el docente monitoree el trabajo de cada uno de los grupos y los haga reflexionar con preguntas tales como: ¿Qué están haciendo? ¿Por qué lo están haciendo? ¿Qué harán con los resultados cuando los obtengan?

Además es importante que los integrantes del grupo respeten las ideas de cada participante y que al final, ellos mismos realicen la metacognición, es decir:

- describan el proceso seguido,
- fundamenten cada paso y
- reflexionen.

Algunas preguntas que servirán para la metacognición son:

- ¿Cómo llegué al resultado?
- ¿Cómo sé que la solución que obtuve es correcta?
- ¿Puedo encontrar otra forma o método para resolver este problema?
- ¿Qué aspecto no me quedó bien claro?
- ¿Qué estrategia utilicé para resolver el problema?
- ¿En qué me puede ayudar la solución de este problema?
- ¿Cuál es el camino más viable?

Una de las expectativas de logro de la Educación Media es que el estudiante aplique el concepto de derivada de funciones en la resolución de problemas en otras disciplinas como Física, Geometría y Economía. Respondiendo a esta expectativa, el texto presenta bajo el título de Problemas de optimización, varias propuestas que involucran expresiones algebraicas, en el cálculo de área y volumen de cuerpos geométricos, el cálculo de altura máxima y el alcance máximo de un proyectil, el cálculo del ingreso total máximo, el máximo beneficio y el costo promedio mínimo.

Este tema es propicio para un trabajo interdisciplinario con el docente de Física, porque permitirá la aplicación de la derivada como otro procedimiento para el cálculo del lanzamiento oblicuo y desplazamiento horizontal de un móvil u otros.

2.3.8.4. Algunos indicadores de evaluación

- Aplica la regla de L'Hôpital en funciones racionales.
- Determina el punto crítico, el valor máximo y el valor mínimo de una función f(x).
- Halla el punto de inflexión de una función en un intervalo dado.

A 3 Propuesta de actividad

TEMA Problemas de optimización.

OBJETIVO Resuelvo problemas que requieran maximizar o minimizar una función.

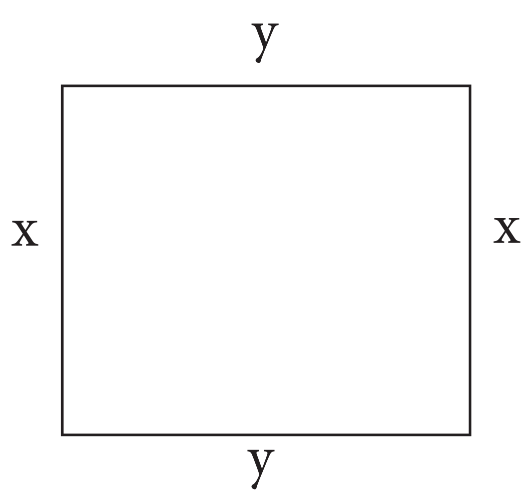
DESARROLLO Presentamos la siguiente situación problemática:

Se desea cercar un patio rectangular de 168 m^2. El tejido de alambre se vende a 3 reales el metro, pero uno de los lados deber ir reforzado con alambre especial de 4 reales el metro. Calcular las dimensiones del patio y el costo mínimo para cercarlo.

SOLUCIONAMOS

Las variables son: longitud del lado reforzado y su opuesto.

y longitud de cada uno de los lados contiguos



Determinamos la función por optimizar:

En nuestro ejemplo es el costo en reales:

$C = 4x + 3x + 3y + 3y$

$C(x) = 7x + 6y$

Expresamos la función anterior en una sola variable, para poder derivar.

Para ello consideramos el área:

$A = x.y = 168\ m^2$

$y = \dfrac{168}{x}$

sustituyendo este valor en C(x) tenemos:

$C(x) = 7x + 6.\dfrac{(168)}{x} = 7x + \dfrac{1008}{x}$

Derivamos esta función para hallar posibles máximos y mínimos:

$C'(x) = 7 - \dfrac{1008}{x^2}$

Igualamos a cero.

$C'(x) = 0$

$7 - \dfrac{1008}{x^2} = 0$

$7x^2 - 1008 = 0 \qquad x^2 = 144$

$x = +12 \qquad y = 14$ P (12, 14) es un punto crítico.

$x = -12 \qquad y = -14$

Las dimensiones del patio son 12 m y 14 m respectivamente.

Calculamos la segunda derivada y reemplazamos x por su igual 12.

$C''(x) = \dfrac{2016}{x} = \dfrac{2016}{12} = 168 > 0$ luego el costo es mínimo.

$C(x) = 7x + 6y = 7.12 + 6.14 = 168$ reales

El costo mínimo para cercar el patio es: 168 reales.

A 4 Propuesta de actividad

TEMA Derivada de una función cúbica o polinómica.

OBJETIVO Determino el valor máximo y mínimo de la función cúbica.

DESARROLLO Planteamos la siguiente situación problemática:

Dada la función $T(x) = 2x^3 - 21\,x^2 + 60\,x - 6$, calculamos la temperatura, expresada en grados centígrados, de una sustancia en función del tiempo, expresado en segundos.

1. ¿En qué momento la temperatura alcanza un máximo o un mínimo?
2. Graficamos aproximadamente la función.
3. ¿En qué intervalos de tiempo aumenta la temperatura y cuándo disminuye?

1. Solucionamos

$T(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x - 6$

$T'(x) = 6x^2 - 42x + 60$

$T'(x) = 0$

$6x^2 - 42x + 60 = 0 \quad :6$

$x^2 - 7x + 10 = 0$

$(x - 5)(x - 2) = 0$

$x_1 = 5 \qquad T_1 = 2.5^3 - 21.5^2 + 60.5 - 6 = 19°$

$x_2 = 2 \qquad T_2 = 2.2^3 - 21.2^2 + 60.2 - 6 = 46°$

$P_1(5, 19)$

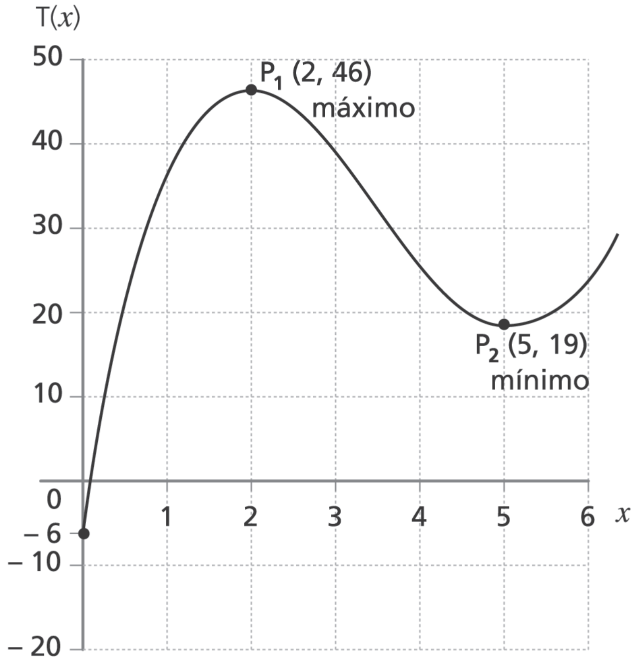
$P_2(2, 46)$

$T''(x) = 12x - 42$ Para x =5

$T''(5) = 12.5 - 42 = 18 > 0$ Mínimo

$T''(2) = 12.2 - 42 = -18 < 0$ Máximo

2. Graficamos aproximadamente la función.



La temperatura máxima alcanza en P_1 (2, 46) y la mínima en el punto P_2 (5,19).

3. La temperatura crece en los intervalos: [0, 2], [5, ∞] y decrece en el intervalo: [2, 5].

   · Concluimos que para conocer los puntos máximos y mínimos, llevamos los puntos críticos a la segunda derivada. Si nos da un valor positivo mayor que cero la temperatura es mínima, y si el valor es menor que cero la temperatura alcanza su valor máximo.