UNIDAD

5 Determinante

Capacidades

Utiliza distintos métodos en el cálculo del determinante de matrices cuadradas de segundo y tercer orden.
Determinante. Concepto.
Propiedades.
Método de Sarrus.
Método de Laplace.

Formula y **resuelve situaciones problemáticas** donde intervengan sistemas de ecuaciones con dos o tres incógnitas, aplicando la regla de Cramer.


C. MacLaurin


G. Leibniz

Antiguamente, la población china no utilizaba letras para representar las variables en un sistema de ecuaciones, sino que desarrolló un método de diagramas en el que la posición del número indicaba de cuál término (o variable) se trataba. A finales del siglo XVII, basados en las ideas de los chinos, elaboraron la teoría de los determinantes los matemáticos Gottfried W. Leibniz, alemán (1646-1716), cuyo aporte fue también el sistema binario de numeración, muy empleado en el sector informático actualmente; y Colin MacLaurin, británico (1698-1746), que aplicó el método de los determinantes a la resolución de ecuaciones con cuatro incógnitas en su Tratado de Álgebra.

Fuente: Vizmanos, J., 1995.

5.1. Determinante. Concepto

En cursos anteriores aprendimos a resolver sistemas de ecuaciones utilizando varios métodos, como el de igualación, sustitución y reducción. En esta unidad trabajaremos otro método: el de determinante.
A cada matriz cuadrada A_{nxn} se le asocia un número real llamado determinante de A, que expresamos así: det(A) o $|A|$ y se lee determinante de A. También se lo designa con la letra griega delta Δ. Si la matriz dada fuese de orden 2, de orden 3 o de orden n, tendríamos determinantes de segundo orden, de tercer orden o de orden superior a tres.

5.2. Determinante de una matriz cuadrada de orden 2

Si la matriz dada es de orden 2 : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

se llama determinante asociado a la matriz A o determinante de segundo orden, el número real obtenido de la diferencia de los productos de los elementos de la diagonal principal y la diagonal secundaria.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11} \cdot a_{22}) - (a_{21} \cdot a_{12})$$

En algunos textos se usa la expresión "la determinante". Nosotros mantendremos el uso corriente "el determinante".

EJEMPLOS:

a) Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \det(A) = \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2.(-1) - 3(-3) = -2 + 9 = 7$

b) Hallamos el valor de x sabiendo que el determinante dado es igual a 0.
Calculamos primero el determinante.

$$\Delta = \begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ x+1 & 4 \end{vmatrix} = [(x-2).4 - (x+1).1] = 4x - 8 - x - 1 = 3x - 9$$

Igualamos a cero el resultado porque $\Delta = 0$ y $\Delta = 3x - 9$, luego despejamos x.

$$3x - 9 = 0 \rightarrow \boxed{x = 3}$$

- Verificamos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3-2 & 1 \\ 3+1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 1.4 - 4.1 = 4 - 4 = 0$$

c) Calculamos el valor de x sabiendo que el determinante es igual a 9.

$$\begin{vmatrix} x & -1 \\ 9x & 3 \end{vmatrix} = 9$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & -1 \\ 9x & 3 \end{vmatrix} = (3.x) - (-1).\, 9x = 3x + 9x = 12x$$

Como $\Delta = 9$ y $\Delta = 12x \rightarrow 12x = 9 \rightarrow \dfrac{12x}{12} = \dfrac{9}{12} \rightarrow x = \boxed{\dfrac{3}{4}}$

- Verificamos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{3}{4} & -1 \\ \frac{27}{4} & 3 \end{vmatrix} = \frac{3}{4}.3 - \left[\frac{27}{4} \cdot (-1)\right] = \frac{9}{4} + \frac{27}{4} = \frac{36}{4} = 9$$

Actividades de fijación

a. Encuentro el determinante de cada una de las siguientes matrices.

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad$ 2) $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad$ 3) $C = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ 4) $D = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ -2 & 20 \end{pmatrix}$

b. Calculo el valor de x, en cada caso, sabiendo que los determinantes son nulos.

1) $\begin{vmatrix} x & 7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 2x & x-2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} x & 3 \\ 2x & x \end{vmatrix}$ 4) $\begin{vmatrix} x+3 & 5 \\ x & x \end{vmatrix}$

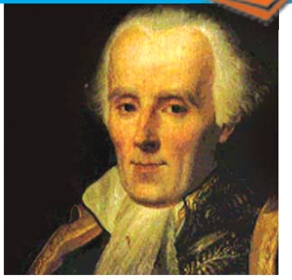
c. Resuelvo las ecuaciones y compruebo posteriormente con mi grupo.

1) $\begin{vmatrix} y & 1 \\ 9 & y \end{vmatrix} = 0$ 2) $\begin{vmatrix} a-4 & 5 \\ 4 & a+4 \end{vmatrix} = 0$ 3) $\begin{vmatrix} z+2 & z-2 \\ z & z-1 \end{vmatrix} = 4$

5.3. Determinante de una matriz cuadrada de orden 3

5.3.1. Definición de Laplace

Dada una matriz cuadrada de orden 3, se llama determinante asociado a la matriz o determinante de tercer orden, el número real que se obtiene de la suma algebraica de los productos de los elementos a_{ij} de una fila (o columna) por el determinante de la matriz de orden 2 obtenida de A al suprimir la fila y la columna donde se encuentra el elemento a_{ij} considerado. Los elementos a_{ij} están precedidos de signo más (+) sí la suma del número de fila y el número de columna (i + j) da par y están precedidos de signo menos (–), en caso contrario.



Pierre Simon de Laplace (1749-1827), matemático francés.
Formuló la regla que permite el cálculo de determinantes de tercer orden, así como las leyes del electromagnetismo y realizó grandes aportes al cálculo de probabilidades. Publicó un ensayo sobre probabilidades, donde expuso el método de los mínimos cuadrados, sobre el cual se basó toda la teoría de los errores.

Fuente: www.artehistoria.com/historia/personajes 6324.htm>

EJEMPLOS:

a) Sea $B = \begin{pmatrix} \overset{a_{11}}{6} & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ Eligiendo la fila 1, hallamos su determinante.

$$\det(B) = \overset{a_{11}}{6}\cdot\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \overset{a_{12}}{7}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \overset{a_{13}}{8}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Positivo porque 1 + 1 = 2 (par)   Negativo porque 1 + 2 = 3 (impar)   Positivo porque 1 + 3 = 4 (par)

det(B) = 6 (15 – 12) – 7 (9 – 6) + 8 (6 – 5) = 18 – 21 + 8 = 5

b) Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ Eligiendo la fila 2, hallamos su determinante.

$$\det(A) = -\overset{a_{21}}{2}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + \overset{a_{22}}{4}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - \overset{a_{23}}{1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

a_{21}: negativo porque 2 + 1 = 3 (impar) a_{22}: positivo porque 2 + 2 = 4 (par) a_{23}: negativo porque 2 + 3 = 5 (impar)

det(A) = – 2 (15 – 0) + 4 (– 5 – 0) – 1 (– 2 – 9) = – 30 – 20 + 11 = – 39

det(A) = – 39

c) Calculamos el determinante de la matriz M, desarrollando la columna 2.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(M) = -\underbrace{(-2)}_{a_{12}} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \underbrace{3}_{a_{22}} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \underbrace{1}_{a_{32}} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

Negativo porque 1 + 2 = 3 (impar)

Positivo porque 2 + 2 = 4 (par)

Negativo porque 3 + 2 = 5 (impar)

$$\det(M) = 2\,(4 - 1) + 3\,(2 - 1) - 1\,(1 - 2) = 6 + 3 + 1 = 10$$

luego, $\det(M) = 10$

Actividades de fijación

a. Calculo los determinantes y aplico el método de Laplace desarrollando una fila.

1) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 4 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

b. Calculo los determinantes desarrollando una columna.

1) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 3 & 7 & 4 \\ 4 & 5 & -9 \end{vmatrix}$

5.3.2. Regla de Sarrus

Hemos aprendido cómo hallar el determinante de una matriz de tercer orden según Laplace, en este apartado conoceremos otro procedimiento denominado “Regla de Sarrus”, pues fue el matemático francés Pierre Sarrus (1798-1861) quien lo enunció.

EJEMPLO:

a. Consideramos la matriz B del ejemplo a. del apartado 5.3.1 y calculamos nuevamente su determinante, aplicando ahora la Regla de Sarrus.

1º Se repiten las columnas 1 y 2 a la derecha de la tercera (o bien las filas 1 y 2 debajo de la tercera).

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \det(B) = \begin{vmatrix} 6 & 7 & 8 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 6 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & \underbrace{1 \quad 2}_{1^{0}\text{ paso}} \end{vmatrix}$$

2º Se determinan las diagonales principal y secundaria y las otras dos paralelas a ellas.

$$\rightarrow \det(B) = \begin{vmatrix} 6 & 7 & 8 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 6 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

3º Se halla la suma de los productos de los elementos de la diagonal principal y sus paralelas y se le resta la suma de los productos de los elementos de la diagonal secundaria y sus paralelas.

$$\rightarrow \det(B) = \begin{vmatrix} 6 & 7 & 8 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 6 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (6.5.3 + 7.6.1 + 8.3.2) - (1.5.8 + 2.6.6 + 3.3.7) =$$

$$(90 + 42 + 48) - (40 + 72 + 63) = 180 - 175 = 5$$

luego, $\det(B) = 5$

- Verificamos que por ambos procedimientos llegamos al mismo resultado.

b. Calculamos el valor de x en la siguiente ecuación.

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

1º Hallamos el determinante de la matriz aplicando la regla de Sarrus.

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

1º paso

2º paso Diagonal secundaria

2º paso Diagonal principal

3º paso

$$= (x.x.1 + 1.1.1 + 1.1.1) - (1.x.1 + 1.1.x + 1.1.1) =$$
$$(x^2 + 1 + 1) - (x + x + 1) =$$
$$(x^2 + 2) - (2x + 1) =$$
$$x^2 + 2 - 2x - 1 =$$
$$x^2 - 2x + 1 = 0$$
$$(x - 1)(x - 1) = 0$$
$$x = 1$$

13 Ñaikũmby porãve hagua

a. Aipuru Sarrus regla ajapo hagua ko'ã determinante.

1) $\begin{vmatrix} 5 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 7 & -4 & 3 \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 7 & -8 & 10 \end{vmatrix}$

b. Aheka mboypahína x aiporukuévo Laplace método.

1) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 10 & 2x & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 0 & 3 & 0 \\ x & -1 & 4 \end{vmatrix} = -3$

c. Ahechakuaa máva réglapa ndahasyive ha ha'e mba'érepa avei.

5.4. Propiedades de los determinantes

- El determinante de una matriz es igual al de su transpuesta.

EJEMPLO:

$$\text{Si}\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}}_{A} = (2.5) - (4.3) = 10 - 12 = -2 \qquad \det(A^t) = \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}}_{A^t} = (2.5) - (3.4) = 10 - 12 = -2$$

$$\boxed{\text{luego, } \det(A) = \det(A^t)}$$

- Si una matriz tiene una fila (o columna) de ceros, su determinante es cero.

EJEMPLO:

$$\text{Si}\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \det(B) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

- Verificamos:

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (0+0+0) - (0+0+0) = 0$$

- Si permutamos dos filas (o columnas) de una matriz, el determinante de la matriz obtenida es el opuesto al determinante de la matriz original.

EJEMPLO:

$$\text{Si}\quad M = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 6 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (36+0+4) - (6+0+120) = 40 - 126 = -86$$

luego, de t(M) = – 86

$$\det(M') = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = (6+0+120) - (36+0+4) = 126 - 40 = 86$$

luego, podemos afirmar que: det (M) = – 86

det (M′) = 86

- Si multiplicamos una fila (o columna) por un número, el determinante de la nueva matriz es igual al producto de ese número por el determinante de la matriz original.

EJEMPLO:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3.2 & 1.2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \det(B) = (-30-8) = -38$$

$$\det(A) = -19 \qquad \det(B) = -38 \rightarrow \det(B) = 2.\det(A)$$

- Si una matriz tiene dos filas (o columnas) iguales, su determinante es cero.

EJEMPLO:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \det(A) = 0$$

- Verificamos:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (10+18+12)-(10+18+2) = 40-40 = 0$$

- Si una matriz tiene dos filas (o columnas) proporcionales, su determinante es cero.

EJEMPLO:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \det(A) = 0$$

Pues los elementos de la fila 2 son proporcionales a los de la fila 1:

FILA 1 = { 2 3 1 } x 2

FILA 2 = { 4 6 2 }

- Verificamos:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 2 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (36-6+0)-(-6+0+36) = 30-30 = 0$$

EJEMPLO:

a. Dada la matriz $P = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ escribimos una matriz Q del mismo orden que cumpla con las siguientes condiciones:

1) det (Q) = det (P) 2) det (Q) = –det (P) 3) det (Q) = 2 det (P)

- Resolvemos.

1) Tomamos Q igual a la transpueta de P, luego:

$$Q = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Verificamos: } \det(P) = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 28-30 = -2 \qquad \det(Q) = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 28-30 = -2$$

Luego, la matriz hallada cumple la condición: det (Q) = det (P).

2) Permutando las filas de P obtenemos la matriz $Q = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

Verificamos: $\det(P) = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 28 - 30 = -2$ $\qquad \det(Q) = \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 30 - 28 = 2$

Luego, se cumple la condición: $\boxed{\det(Q) = -\det(P)}$

3) Multiplicando por 2 una fila de la matriz P obtenemos la matriz Q.

$$Q = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Para verificar hallamos det(Q).

$\det(Q) = \begin{vmatrix} 8 & 10 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 56 - 60 = -4$ y como $\det(P) = -2$

Tenemos que:

$$\det(Q) = 2.\det(P)$$
$$-4 = 2.(-2)$$
$$-4 = -4$$

Actividades de fijación

a. Escribo tres matrices aplicando las reglas, de modo que sus determinantes sean cero.

b. Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ escribo una matriz N del mismo orden que cumpla con las siguientes condiciones:

1) $\det(N) = \det(M)$ $\qquad$ 2) $\det(N) = -\det(M)$ $\qquad$ 3) $\det(N) = 3.\det(M)$

c. Justifico las igualdades:

1) $\begin{vmatrix} 2 & a & b \\ 4 & c & d \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 . \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 2 & c & d \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ $\qquad$ 2) $4 . \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$

d. Teniendo en cuenta las propiedades de los determinantes, hallo lo indicado sin realizar operaciones.

1) $\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10 \rightarrow \det(A^t)$ $\qquad$ 2) $\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2 \rightarrow \det(3B)$

3) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 13 \rightarrow \begin{vmatrix} 3.2 & -3 \\ 3.5 & -1 \end{vmatrix} =$

5) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$

4) $\begin{vmatrix} 1 & -5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 17 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -5 & 6 \end{vmatrix} =$

6) $\begin{vmatrix} 3 & 15 & 1 \\ 5 & 25 & 0 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} =$

5.5. Regla de Cramer

* Leemos y analizamos el siguiente planteamiento:
  Doña Alicia posee en Luque una joyería que produce delicadas filigranas en oro y plata. Ella pesó 7 medallas de plata y 3 cadenas del mismo metal y verificó que juntas pesaban 29 g. Luego pesó 4 medallas junto con 5 cadenas, las que sumaron 33 g. Si todas las medallas y cadenas tienen el mismo gramo de plata, ¿cuánto pesa cada medalla y cada cadena?

La artesanía en oro y plata, en cuero y karanda'y, la música y la producción de arpas y guitarras son signos inconfundibles de Luque. En la avenida General Aquino, también conocida como "Avenida de los joyeros", se encuentran tiendas de fabricación y venta de esta preciosa artesanía.

Fuente: La Magia de Nuestra Tierra, 2003.

* Las incógnitas son el peso de una medalla y el de una cadena.

* Vamos a plantear una ecuación teniendo en cuenta las condiciones del problema.

  Sean x = peso de una medalla e y = peso de una cadena:

$$\begin{cases} 7x + 3y = 29 \\ 4x + 5y = 33 \end{cases}$$

* Resolvemos el sistema, aplicando el método de reducción.

Cálculo de x

$$\begin{cases} \overset{a_1}{7x} + \overset{b_1}{3y} = \overset{c_1}{29} \ldots (\overset{b_2}{5}) \\ \underset{a_2}{4x} + \underset{b_2}{5y} = \underset{c_2}{33} \ldots (\underset{-b_1}{-3}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7 \,.\, 5x + 3 \,.\, 5y = 29 \,.\, 5 \\ 4 \,.\, (-3)x + 5(-3)y = 33 \,.(-3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 35x + \cancel{15y} = 145 \\ -12x - \cancel{15y} = -99 \end{cases}$$

$$(35 - 12)\, x = 145 - 99$$

$$x = \frac{\overset{b_2 . c_1}{145} - \overset{b_1 . c_2}{99}}{\underset{a_1 . b_2}{35} - \underset{a_2 . b_1}{12}}$$

$$x = \frac{46}{23} = \boxed{2g}$$

Cálculo de y

$$\begin{cases} \overset{a_1}{7x} + \overset{b_1}{3y} = \overset{c_1}{29} \ldots (\overset{a_2}{4}) \\ \underset{a_2}{4x} + \underset{b_2}{5y} = \underset{c_2}{33} \ldots (\underset{(-a_1)}{-7}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7 \,.\, 4x + 3 \,.\, 4y = 29 \,.\, 4 \\ 4 \,.\, (-7)x + 5 \,.\, (-7)y = 33 \,.(-7) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{28x} + 12y = 116 \\ \cancel{-28x} - 35y = -231 \end{cases}$$

$$(12 - 35)\, y = 116 - 231$$

$$y = \frac{\overset{a_1 . c_2}{116} - \overset{a_2 . c_1}{231}}{\underset{a_1 . b_2}{12} - \underset{a_2 . b_1}{35}}$$

$$y = \frac{-115}{-23} = \boxed{5g}$$

• El peso de cada medalla es 2g y el de cada cadena 5g.

* Analizando todo el proceso seguido podemos ver que:

En los resultados obtenidos el denominador común y los dos numeradores son, respectivamente, los determinantes de las matrices:

$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$

Formada con los coeficientes de las variables.

$Mx = \begin{pmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix}$

Se obtiene reemplazando en la matriz M los coeficientes de "*x*" por los términos independientes.

$My = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix}$

Se obtiene reemplazando en la matriz M los coeficientes de "*y*" por los términos independientes.

Luego, las soluciones anteriores se pueden expresar así:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\det(Mx)}{\det(M)} = \frac{\Delta x}{\Delta} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\det(My)}{\det(M)} = \frac{\Delta y}{\Delta}$$

Las soluciones del sistema son: $x = \dfrac{\Delta x}{\Delta}$ e $y = \dfrac{\Delta y}{\Delta}$

Esta forma de resolver sistemas de ecuaciones, por determinantes, se conoce como Regla de Cramer.

* Verificamos la solución del sistema de ecuaciones aplicando la regla de Cramer.

$$\begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ \end{array}$$
$$\begin{cases} 7x + 3y = 29 \\ 4x + 5y = 33 \end{cases}$$
$$\begin{array}{ccc} a_2 & b_2 & c_2 \\ \end{array}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 7.5 - 4.3 = 35 - 12 = 23$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 29 & 3 \\ 33 & 5 \end{vmatrix} = 29.5 - 33.3 = 145 - 99 = 46$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 29 \\ 4 & 33 \end{vmatrix} = 7.33 - 4.29 = 231 - 116 = 115$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{46}{23} = \boxed{2} \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{115}{23} = \boxed{5}$$

• Comprobamos que ambos procedimientos nos llevan al mismo resultado.

Gabriel Cramer, matemático suizo (1704-1752), trabajó en Análisis y determinantes. Es más conocido por la regla que da la solución de un sistema lineal de ecuaciones en términos de determinantes.

Fuente: http://www.mat. usach.cl/histmat/html/cram.html

Generalizando, para un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = c_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = c_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = c_3 \end{cases}$$

Los determinantes son:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta x = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{vmatrix}$$

Las soluciones del sistema son:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta} \qquad z = \frac{\Delta z}{\Delta}$$

EJEMPLOS:

a. Resolvemos los siguientes sistemas utilizando la Regla de Cramer.

1) $\begin{cases} x + 1 = 1 \\ 2x - 4y = 14 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -6 \qquad \Delta x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 14 & -4 \end{vmatrix} = -18 \qquad \Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 14 \end{vmatrix} = 12$$

$x = \dfrac{-18}{-6} = 3$; $y = \dfrac{12}{-6} = -2$; solución $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$

- Describimos el proceso seguido y decimos de qué otra manera podemos resolver el sistema.

b. Analizamos la siguiente situación.

Tres números enteros suman 100. La semisuma del mayor y del menor es igual al doble del número del medio; y $\frac{1}{5}$ del mayor menos $\frac{1}{4}$ del número del medio es igual al número menor disminuido en 7. Calculamos los números.

* Como tenemos tres incógnitas, vamos a plantear tres ecuaciones que respondan al enunciado del problema.

Incógnitas
x = número mayor
y = número del medio
z = número menor

1.º ecuación: $x + y + z = 100$

2.º ecuación: $\dfrac{x + z}{2} = 2y$

3.º ecuación: $\dfrac{x}{5} - \dfrac{y}{4} = z - 7$

Sacando los denominadores en las ecuaciones 2.º y 3.º y ordenando, nos queda:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ x - 4y + z = 0 \\ 4x - 5y - 20z = -140 \end{cases}$$

* Para resolver este sistema usamos la Regla de Cramer.

* Resolvemos.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 4 & -5 & -20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & -4 \\ 4 & -5 & -20 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 79 + 41 = 120$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 100 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ -140 & -5 & -20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 100 & 1 & 1 & 100 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 0 & -4 \\ -140 & -5 & -20 & -140 & -5 \end{vmatrix} = 7\,860 - 60 = 7\,800$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 100 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -140 & -20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 100 & 1 & 1 & 100 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & -140 & -20 & 4 & -140 \end{vmatrix} = 260 + 2\,140 = 2\,400$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 100 \\ 1 & -4 & 0 \\ 4 & -5 & -140 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 100 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 0 & 1 & -4 \\ 4 & -5 & -140 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 60 + 1\,740 = 1\,800$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{7\,800}{120} = 65$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{2\,400}{120} = 20$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{1\,800}{120} = 15$$

Los números son: 65, 20 y 15.

* Verificamos. Reemplazando los valores de x, y, z en la primera ecuación:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 100 \\ 65 + 20 + 15 &= 100 \\ 100 &= 100 \end{aligned}$$

* ¿Qué procesos seguimos para llegar a la solución? ¿Por qué utilizamos el método de Cramer? ¿Conocemos otra forma de resolver el sistema de ecuaciones planteado?

c. Trabajamos con un poco de historia.

Colin MacLaurin fue uno de los matemáticos que desarrolló la Teoría de los Determinantes. Para saber en qué año nació seguimos estas pistas: se trata de un número de 4 cifras menor que 2 000. La suma de las cifras de las centenas, de las decenas y de las unidades es igual a 23. La mitad de las cifras de las centenas más la tercera parte de las cifras de las decenas es igual a 6. La cifra de las centenas más la de las unidades es igual a 14.

* El problema nos pide hallar el año en que nació Colin MacLaurin.
  Los datos relevantes son:

  Buscamos un nº de 4 cifras menor que 2 000, por tanto la unidad de mil es 1. Luego debemos calcular los tres números restantes.

* Interpretamos el problema escribiendo un sistema de ecuaciones, teniendo en cuenta las condiciones dadas.

  Sean: x = cifra de las unidades.
  y = cifra de las decenas.
  z = cifra de las centenas.

$$\begin{cases} x + y + z = 23 & ① \\ \frac{1}{2}z + \frac{1}{3}y = 6 & ② \\ x + z = 14 & ③ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 23 & ① \\ 0x + 2y + 3z = 36 & ② \\ x + 0y + z = 14 & ③ \end{cases}$$

* Aplicamos la Regla de Cramer para resolver el sistema:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (2 + 3) - 2 = 3$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 23 & 1 & 1 & 23 & 1 \\ 36 & 2 & 3 & 36 & 2 \\ 14 & 0 & 1 & 14 & 0 \end{vmatrix} = (46 + 42) - (28 + 36) = 88 - 64 = 24$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 23 & 1 & 1 & 23 \\ 0 & 36 & 3 & 0 & 36 \\ 1 & 14 & 1 & 1 & 14 \end{vmatrix} = (36 + 69) - (36 + 42) = 105 - 78 = 27$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 23 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 36 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 14 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (28 + 36) - (46) = 64 - 46 = 18$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{24}{3} = 8 \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{23}{3} = 9 \qquad z = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{18}{3} = 6$$

El año en que nació Colin MacLaurin fue: 1698

* Verificamos, reemplazando los valores de x, y, z en la ecuación ①

$$x + x + z = 23 \rightarrow 8 + 9 + 6 = 23$$
$$23 = 23$$

* ¿De qué otra forma se puede resolver este problema?

d. Leemos y establecemos un plan para resolver el siguiente planteamiento.

Adivinamos con qué número María ganó la rifa organizada para adquirir libros de la narrativa nacional para la biblioteca. Algunas pistas son: es un número de 4 dígitos y menor que 3 000; uno de los dígitos es cero y se encuentra entre dos dígitos impares. De los tres dígitos restantes se conoce que:

- la diferencia de dos de ellos es – 4
- el doble de la suma de esos mismos dígitos es igual al triple del tercero disminuido en 12, y
- la suma de los tres dígitos es igual a 14.

¿Qué obras de la narrativa nacional me gustan más? ¿Por qué?

* El problema nos pide hallar un número de 4 cifras con el que María ganó la rifa. Sabemos que es menor que 3 000, luego la unidad de mil solo puede ser 1 o 2.
También sabemos que una de las cifras es cero (0). Por tanto nos resta calcular tres números.

* Escribimos un sistema de ecuaciones, teniendo en cuenta las condiciones del problema.

Sean los dígitos: x, y, z

$$\begin{cases} x - y = -4 & ① \\ 2(x+y) = 3z - 12 & ② \\ x + y + z = 14 & ③ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - y + 0z = -4 & ① \\ 2x + 2y - 3z = -12 & ② \\ x + y + z = 14 & ③ \end{cases}$$

* Luego aplicando la regla de Cramer resolvemos.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2+3) - (-3-2) = 5 + 5 = 10$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} -4 & -1 & 0 & -4 & -1 \\ -12 & 2 & -3 & -12 & 2 \\ 14 & 1 & 1 & 14 & 1 \end{vmatrix} = (-8+42) - (12+12) = 34 - 24 = 10$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 & 1 & -4 \\ 2 & -12 & -3 & 2 & -12 \\ 1 & 14 & 1 & 1 & 14 \end{vmatrix} = (-12+12) - (-42-8) = 0 + 50 = 50$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -4 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -12 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 14 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (28+12-8) - (-8-12-28) = 32 + 48 = 80$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{10}{10} = 1 \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{50}{10} = 5 \qquad z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{80}{10} = 8$$

Formamos el número

1	0	5	8
UM	C	D	U

El número buscado es 1 058.

María ganó la rifa de su curso con la boleta Nº 1 058.

* Verificamos los resultados utilizando el método de reducción.

* ¿Cuál de lo métodos utilizados para resolver el problema nos resultó más práctico? ¿Por qué?

Actividades de fijación

a. Resuelvo los siguientes sistemas utilizando la Regla de Cramer.

1) $\begin{cases} 5x - 6y = 7 \\ 3x - 4y = 3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} -2x + 3y = 0 \\ 6x + 9y = 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 8x + 2y - z = -2 \\ 5x + y\,y + z = 1 \\ x - 2y = -9 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 4x - y + z = 4 \\ 2x + y - z = 2 \\ x - y + 5z = 5 \end{cases}$

b. Resuelvo los siguientes problemas usando el método que considero más apropiado y comparto mi trabajo con mis pares.

1) La suma de las edades de tres hermanos es 51 años. La mitad de la edad del mayor más la cuarta parte de la del medio, más la tercera parte de la del menor suman 19 años; y un cuarto de la edad del mayor más un medio de la del hermano mediano más un quinto de la del menor dan 16 años ¿Cuál es la edad de cada uno de ellos?

¿Qué forma de relación deben tener los hermanos entre sí?

2) Uno de los ángulos interiores de un terreno que tiene la forma de un cuadrilátero mide 90º. De los tres restantes, la suma de los no consecutivos es igual al otro más 30º; y este es el suplemento del cuarto.

- ¿Cuánto mide cada ángulo?
- ¿Qué tipo de cuadrilátero es?

c. Luego de solucionar estos problemas, explico a mis compañeros y compañeras la estrategia utilizada.

1) En la librería "La Cultura" de la ciudad de Itá, tres amigas compran para aprovechar las ofertas lápices, borradores y cuadernos de igual precio. La primera compró 4 lápices, 3 borradores y 2 cuadernos por ₲ 21 800. La segunda compró 2 lápices, 5 borradores y 3 cuadernos por ₲ 28 400 y la tercera, 4 lápices y 2 cuadernos por ₲ 18 800. ¿Cuánto cuesta cada artículo? ¿Cuánto cuestan hoy estos artículos?

Averiguo los precios actuales de estos artículos y formulo con esos datos un problema similar al anterior.

2) Rosa y Carlos se encargaron de comprar las entradas para el partido de fútbol donde asistirán con sus amigos. Rosa compró 2 plateas, 1 gradería y 3 preferencias y pagó ₲ 230 000. Carlos compró 2 plateas, 2 graderías y 1 preferencia por ₲ 150 000. ¿Cuánto pagaron por cada localidad?

Escribo con ayuda de mis compañeros y compañeras las reglas de juego del fútbol.

Actividades de retroalimentación

REALIZO LAS ACTIVIDADES, SELECCIONO LA QUE ME PARECIÓ MÁS INTERESANTE Y EXPLICO A MIS PARES CÓMO LO HICE.

a. Resuelvo las ecuaciones.

1) $\begin{vmatrix} x+3 & x-7 \\ x & x-3 \end{vmatrix} = 7$

2) $\begin{vmatrix} x-1 & 3 & x \\ 3 & x & 1 \\ x & 2 & x+1 \end{vmatrix} = 17$

b. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 10$, hallo los siguientes determinantes.

1) $\begin{vmatrix} 2a+2b & 2b \\ c+d & d \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$

c. Utilizo el método de determinantes y resuelvo los sistemas.

1) $\begin{cases} 9x - 8y = -3 \\ x - 5y = 12 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4x + 6z = 30 \\ 3x + 4y + 5z = 25 \\ 4x + 5y + 6z = 34 \end{cases}$

d. Resuelvo los problemas y verifico los resultados.

1) Alberto, Teresa y Gloria tienen juntos una caja de ahorros en reales para construir una cancha de fútbol en el patio de su casa, con un saldo a la fecha de R$ 4 200. Si sumamos $\frac{1}{2}$ de lo que depositó Alberto con $\frac{1}{3}$ de lo depositado por Teresa y restamos a esta suma lo depositado por Gloria obtenemos R$ 500. Si Alberto depositó R$ 900 más que Gloria, ¿cuánto depositó cada uno?

- ¿Cuál es su equivalente en guaraníes?
- ¿Tiene ventaja ahorrar en moneda extranjera? ¿Por qué?

Opinamos sobre las conductas que se observan en las canchas de fútbol. Vemos de qué forma se puede alentar a los equipos, sin molestar a los demás.

2) De una piscina que tiene la forma de un prisma rectangular, se sabe que:
- la suma de sus tres dimensiones es 12,5 m.
- el doble del largo más el ancho menos la altura es igual a 17,5 m.
- el doble de la altura es igual al ancho.

¿Cuál es la medida del volumen de la piscina?

Aplicando lo aprendido en las clases de Química, Ciencias Naturales y Salud respondemos.

a. ¿Cuáles son las sustancias que se utilizan para mantener limpia y transparente el agua de las piscinas?
b. ¿Cuál es el pH ideal que debe tener el agua de una piscina? ¿Cómo se determina dicho valor?
c. ¿Qué controles se deberían realizar al agua de una piscina para determinar su calidad?
d. ¿Qué beneficios aporta a la salud la práctica de la natación?

Autoevaluación

RESUELVO LAS ACTIVIDADES CONSIDERANDO LO QUE SE SOLICITA, VERIFICO MIS RESULTADOS Y ANALIZO EL PROCEDIMIENTO QUE SEGUÍ.

a. Hallo en cada caso el valor de x sabiendo que los siguientes determinantes son nulos.

1) $\begin{vmatrix} x & 1 \\ 4 & x \end{vmatrix} = 0$

2) $\begin{vmatrix} x-3 & 1 \\ 5 & x+1 \end{vmatrix} = 0$

b. Calculo los determinantes.

1) Desarrollando una fila:

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

2) Desarrollando una columna:

$$P = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 6 & 3 & 12 \\ 10 & 15 & 20 \end{vmatrix}$$

c. Determino el valor del determinante de la matriz A, aplicando la regla de Sarrus e identifico la respuesta correcta en cada caso.

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

A) – 28
B) 10
C) –10
D) 28

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

A) 0
B) – 16
C) 16
D) 8

d. Resuelvo los siguientes sistemas utilizando la regla de Cramer.

1) $\begin{cases} 3x - y + z = 3 \\ 2x + y - z = 2 \\ x - y + 5z = 5 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4x - 5y + 7z = -15 \\ 4x + 4y + 8z = 12 \\ 3x + 2y - 5z = 6 \end{cases}$

e. Resuelvo el siguiente problema e identifico la respuesta correcta.

1) La suma de los tres ángulos de un triángulo es 180º. Si la suma del menor y del mediano excede en 30º al mayor, y la diferencia entre el doble del menor y del mayor es 15º, ¿cuánto mide cada ángulo?

A) $x = 75º$; $y = 60º$; $z = 45º$
B) $x = 60º$; $y = 90º$; $z = 30º$
C) $x = 45º$; $y = 60º$; $z = 75º$
D) $x = 60º$; $y = 60º$; $z = 60º$

RESUMIMOS

Determinante:

A cada matriz cuadrada A_{nxn} se le asocia un número real llamado determinante de A, que expresamos así: det(A) o $|A|$ y se lee determinante de A. También se lo designa con la letra griega delta Δ. Si la matriz dada fuese de orden 2, de orden 3 o de orden n, tendríamos determinantes de segundo orden, de tercer orden o de orden superior a tres.

Los algoritmos de cálculos de los determinantes de orden n nos proporcionan:

- La definición de Laplace.
- La Regla de Sarrus, para calcular determinantes de orden 3.
- La Regla de Cramer, que nos permite resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos o más incógnitas.