MÓDULO 2

UNIDAD 2

EMA

EDUCACIÓN MEDIA ABIERTA

PARAGUAY EN UN CONTEXTO INTEGRADOR

Esta unidad te ofrece contenidos muy ricos para reflexionar sobre la necesidad de una cultura de responsabilidad social compartida para la comunidad iberoamericana, una visión conjunta de entender nuestra integración y los principios éticos sobre los que se sustenta, que nos permita integrar en la agenda de cada nación el compromiso con el bien común iberoamericano. Centra su atención, en las acciones en el contexto geopolítico iberoamericano y paraguayo sobre la base de la formación de valores ciudadanos asociados a la responsabilidad social.

Las Ciencias Sociales intervienen en la formación de la capacidad para el desarrollo de una inteligencia crítica del y la joven, para ampliar sus experiencias personales. Ayuda a entender y juzgar las acciones realizadas por los estados que se hallan relacionados por el vínculo de la cooperación. Al juzgar esas acciones sugiere respuestas inteligentes a problemas actuales que los pueblos iberoamericanos padecen.

En ese sentido, la inteligencia crítica se va afirmando sobre la base del contexto geopolítico iberoamericano, y así podrá analizar, comparar y discernir los aspectos de las acciones que beneficiaron a la humanidad y los que ejercieron una incidencia negativa sobre la misma.

CONTEXTO GEOPOLÍTICO IBEROAMERICANO

Juntos vamos a contextualizar la entidad iberoamericana y, a partir de allí, entender el protagonismo de los países iberoamericanos en las acciones realizadas.

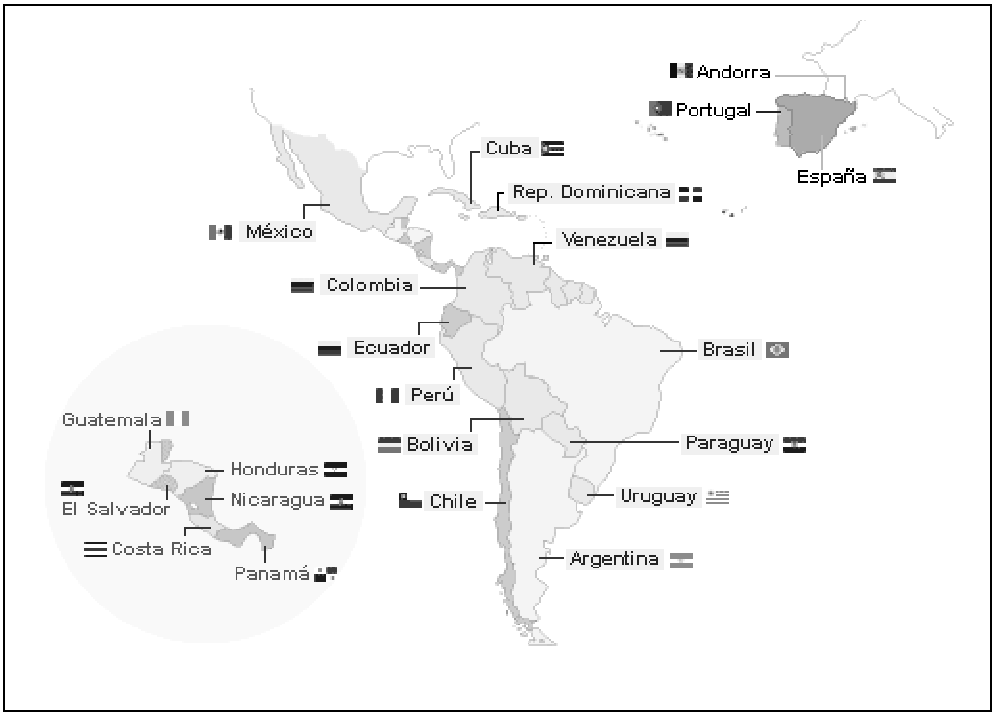
Para que un país prospere integralmente, es importante lograr relaciones internacionales de calidad. En ese sentido, nuestro país viene acompañando lo que se llama la “geopolítica iberoamericana” que se encuentra determinada por el desarrollo de programas de cooperación entre países que forman parte de Iberoamérica.

GEOPOLÍTICA

La geopolítica es referida, en una definición simple, a las relaciones entre los hombres y, entre ellos y el Estado, más aún, estos tres actores (la individualidad, la colectividad y el Estado, éste último tanto como administración, territorio y legalidad) relacionados con su exterioridad, su afuera territorial.

Fuente: Del Vecchio, Giorgio; Filosofía del Derecho; 1997

Países que conforman la entidad iberoamericana



Fuente: www.ciberamerica.org./Areas/identidad.htm

Para que entiendas mejor de lo que vamos a hablar, es decir, de la realidad geopolítica iberoamericana, tendremos en cuenta el desarrollo de un entramado de dimensiones, interdependientes entre sí.

1. Dimensión cultural

Antes de hablar de la dimensión cultural, conviene recordar qué es la cultura. La definición más completa, y la más usual es la Tylor, quien sostiene, “la cultura (...) es, pues, ese todo complejo que incluye el conocimiento, las creencias, el arte, la moral, el derecho, la costumbre y cualesquiera otros hábitos y capacidades adquiridos por el hombre como miembro de la sociedad” (Tylor, 1871/1958, p.1).

Según esta definición, las características culturales iberoamericanas son múltiples, pues, cada grupo que existe en ella es poseedor de un sin fin de peculiaridades. Es un hecho natural, dada la conjunción de todo tipo de grupos que habitan, conviven e interactúan en ella.

Ahora, indicaremos algunas características de la realidad pluricultural Iberoamericana.

1.1 Cultura afroamericana: Los países que componen el universo de esta característica cultural son los descendientes africanos; Brasil, Colombia, Jamaica, Cuba y Haití, principalmente. Está marcada por una síntesis de creencias religiosas, elementos rituales del catolicismo con ingredientes de las religiones mágicas de los primitivos africanos. En el Caribe se los llama vudú, en el Río de la Plata, se lo conoce como macuba.

IBEROAMÉRICA

Es el conjunto de países cuya identidad común tiene sus raíces en el mestizaje, inherente a la fusión de culturas, que posibilitaron los años de convivencia: en la Península Ibérica, entre musulmanes, judíos y cristianos durante ocho siglos, y en América Latina a través del mestizaje producto del cruce de los pueblos precolombinos, europeos y africanos. Todo lo cual permitió la absorción de los referentes ajenos, hasta convertirse en algo propio.

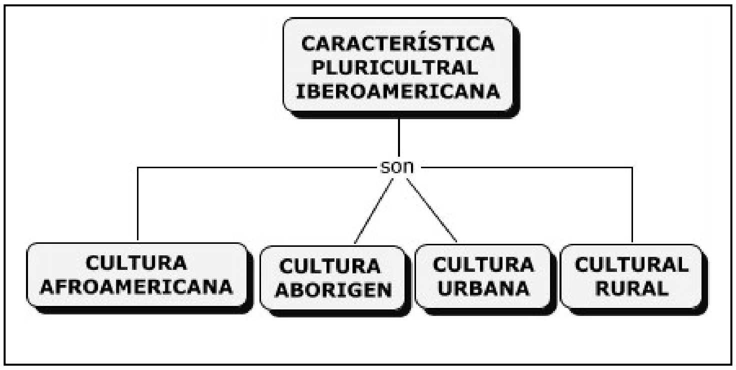
En la actualidad los países iberoamericanos están unidos a través de múltiples acuerdos de cooperación.

Fuente: AAVV; Culturas Latinoamericanas; 1992

1.2 La cultura aborigen: Pertenece a los nativos o a los descendientes directos. Poseen características culturales autóctonas. Hoy día, luchan por rescatar su cultura, reivindicar los derechos e ir ganando los espacios que legítimamente consideran que les pertenece en los distintos ámbitos latinoamericanos.

1.3 La cultura urbana: Los países latinoamericanos han crecido en sus urbes; algunas gigantescas como San Pablo y México. En ellas se puede apreciar el fenómeno del éxodo masivo de los pobladores, que por algunas circunstancias han dejado sus tierras para ir a aumentar el cinturón de pobreza. En definitiva, la concentración de grandes masas de personas procedentes de las áreas rurales o aledañas a las ciudades contribuye a un acelerado crecimiento de las ciudades; y como consecuencia, la formación de una cultura diferente.

1.4 La cultural rural: Se puede decir que es la que conserva las características culturales, sociales y económicas propias de un país. En las áreas rurales se encuentra el núcleo generador de la cultura latinoamericana.



2. Dimensión Ecológica

La ecología es la ciencia que estudia las relaciones entre los seres vivos y el medio en el que viven (la Ecología y la Geografía están necesariamente ligadas a la hora de ser abarcadas). Así pues, estudia la relación entre el ser humano y su medio, la Tierra, un gran almacén que proporciona recursos materiales de todo tipo: agua, oxígeno, minerales, madera, alimentos, todo cuanto es preciso para vivir. Sin embargo, existe la posibilidad de que ese gran almacén se agote.

Efectivamente, los recursos naturales del planeta son abundantes y durante largo tiempo se creyó que eran casi ilimitados, pero la humanidad ha comenzado a darse cuenta de que dichos recursos son finitos, y, por ello, es preciso reducir y racionalizar su consumo. En este sentido, los países del primer mundo, observan a Sudamérica con especial atención, en primer lugar, promoviendo el estudio de los componentes y factores que inciden en los diferentes ecosistemas, a fin de eliminar o paliar al máximo los riesgos que el desarrollo de actividades humanas implica en la evolución de los mismos, y, en segundo lugar, concienciando a los individuos respecto al grave peligro que entraña la explotación irracional de la tierra. Estos esfuerzos se cristalizan, en el contexto iberoamericano, a través de proyectos, estudios, dinero y asesoramiento.

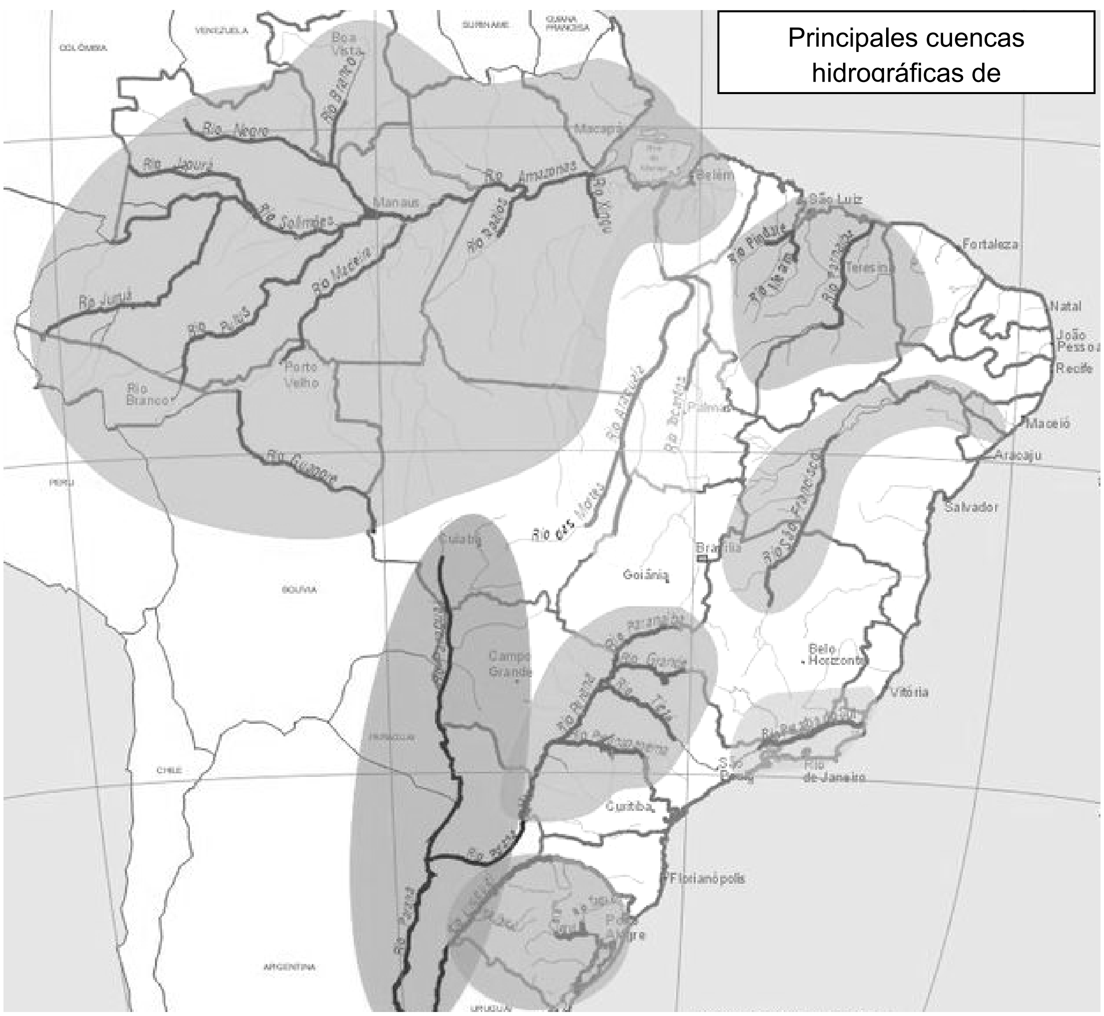
Entre las zonas naturales más importantes de la Región de América del Sur se encuentran:

a) La cuenca del Amazonas: es una selva tropical única en su género, y una de las últimas que quedan, por lo que es un área protegida, y un santuario natural para las especies silvestres, la flora y los grupos indígenas que aún viven en ella según sus costumbres ancestrales.

b) La Patagonia argentina: es otro ecosistema de recursos incalculables, surcado por ríos de aguas muy frías y la imponente cordillera de los Andes.

c) La Cuenca del Río de la Plata: con su red hidrográfica compuesta por grandes ríos como el Río de la Plata, Paraná, Paraguay y Uruguay, constituye una región muy apta para el cultivo y la ganadería, aunque las selvas tropicales que solían cubrirla, como las del Paraguay, desaparecieron casi en su totalidad.

d) El acuífero guaraní: reserva que podría proveer de agua dulce a toda la región en un futuro quizá no muy lejano.



Fuente: weblogs.madrimasd.org/images

3. Dimensión política

La cooperación internacional abarca también, al sistema político; sobre todo, la conciencia política de los ciudadanos, pues, se da, muchas veces, el fenómeno de la apatía del ciudadano común frente a la realidad sociopolítica de su país y la Región.

Para entender mejor el comportamiento político de los individuos se desarrolla, a continuación, la siguiente teoría.

La dimensión política conecta al individuo con la comunidad o sociedad constituida políticamente, es decir como organización autárquica (o independiente y autosuficiente). La vinculación política del individuo es la más abstracta de todas en la sociedad actual, pues establece la relación de la persona en cuanto ciudadano como un ente abstracto (el Estado). Excepto para la denominada “clase política” (que vive de y para la política), la relación del individuo con el Estado se caracteriza por un sentimiento de lejanía y un simbolismo desligado de la realidad diaria. La política impregna los otros dos sistemas, pues articula un conjunto de la sociedad, estableciendo las esferas de la vida privada y reorientando la actividad económica. Se da, por consiguiente, la paradoja de que cuanto más lejana siente el individuo determinada realidad, tanto más importante puede ser para el conjunto de la vida colectiva.

Fenómenos comunes en nuestra sociedad:

Esta tesis da explicación a dos fenómenos comunes en nuestra sociedad en relación a la vida política:

a) la facilidad del ciudadano de entregar su voto al mejor postor y,
b) la gran ignorancia sobre cuestiones políticas, tales como:
- el fin de la guerra fría y el derrumbe del comunismo,
- la desaparición de los regímenes dictatoriales, que eran típicos de Latinoamérica,
- el sentido del sistema democrático,
- las delicadas transiciones políticas, a veces tumultuosas, pero definitivas,
- el panorama político que amenaza la democracia, representado por la ideología revolucionaria.

Los individuos, al no estar vinculados directamente a la gestión política, no dimensionan la consecuencia de su decisión. Sin embargo, esto no sucede con la “clase política” porque su solvencia económica se halla inmediatamente relacionada con su economía.

Durante la época de elecciones esto se visualiza con más fuerza, ya que si le preguntas a un ciudadano que esté al frente de un movimiento político en particular qué piensa sobre los resultados de las mismas, manifestará gran preocupación puesto que su trabajo está en juego; si te preguntas a un ciudadano común se mostrará casi indiferente pues no encuentra una incidencia directa en su día a día.

Estas dos actitudes, frecuentemente, se perciben en las personas en nuestra sociedad. Pero muchas veces, son inconscientes. Pues, el sistema político es abstracto, y sólo afecta, en forma inmediatamente, a la clase política.

No sucede lo mismo con el sistema económico, porque éste golpea directamente la economía hogareña.

La cooperación internacional es de absoluta relevancia para que el Estado particular pueda cumplir cabalmente con su función de concienciar, permanentemente, al ciudadano sobre la importancia de la vinculación política del ciudadano con las demás dimensiones de la vida social. Sólo de esta manera se podrá construir una sociedad democrática, compuesta por ciudadanos comprometidos con la causa de su país.

4. Dimensión étnica

Iberoamérica posee una identidad étnica, fundamentalmente, porque comparte idioma, creencias, valores, hábitos, costumbres y normas. Sin embargo, conforma una comunidad racialmente heterogénea, con elementos biológicos de diversos orígenes, aunque prevalece el mestizaje.

Los más importantes estratos raciales son:

Aborígenes del Paraguay

Fuente: http://bp1.blogger.com/
Paraguay-totobiegos.jpg

En los grupos de jóvenes puede verse la integración de inmigrantes, mestizos, negros, blancos e incluso aborígenes.

Banco de imágenes Rubén Arguello

DIMENSIONES ÉTNICAS IBEROAMERICAS

Mestizos:
Es la razón de ser del continente "americano". La población latinoamericana, presenta caracteres aborígenes y europeos, tanto en lo étnico como en lo cultural. El proceso de mestizaje durante la colonia fue muy intenso.

Negros
Son descendientes de los esclavos que en gran cantidad fueron traídos desde África a América para efectuar todo tipo de trabajos. En América Latina, predominan los grupos raciales negros, en Brasil, Colombia, Panamá y el Caribe. En Paraguay hubo un desplazamiento de los grupos negros de la integración social (Camba Cué).

Aborigen
Son los habitantes naturales de la región. En Paraguay persisten, a pesar de las adversidades algunas parcialidades aborígenes. Los países donde constituyen una población considerable son Bolivia, Chile, Perú y México.

Blancos
Son descendientes directos de europeos o de un mestizaje muy suave o escaso. El porcentaje de población blanca varía de un país a otro, siendo Argentina, Uruguay, Paraguay y Chile quienes presentan un mayor porcentaje, en gran medida por el contacto con grupos de inmigrantes europeos a lo largo del siglo XX.

Los grupos inmigrantes
Desde la segunda mitad del siglo XX, en América Latina avinieron de todas partes muchos inmigrantes, configurando con su aporte la variada gama pluriétnica de nuestro continente. Los principales grupos inmigrantes son asiáticos (coreanos y chinos, principalmente); además de árabes y libaneses; y europeos de distintos países, italianos, alemanes, españoles, etc. El departamento de Itapúa es considerado "crisol de razas", pues, en él, conviven en armónica integridad veinticuatro grupos inmigrantes.

Teniendo en cuenta esta complejidad en cuanto a la pluriculturalidad en Iberoamérica que implica diferencias en el modo de pensar, de hacer y de sentir, los países asociados han venido aunando esfuerzos con el ánimo de construir una auténtica cultura de solidaridad. Encontrar un punto común que pueda mantener el respeto entre las naciones y la consecuente paz. En este sentido, con el afán de encontrar medios efectivos para conseguir estos objetivos, se vienen realizando las cumbres iberoamericanas, en las que se discuten temas de diversa índole como podrás leer a continuación.

SITUACIONES GEOPOLÍTICAS CONFLICTIVAS

En este apartado se te propone considerar algunas situaciones geopolíticas conflictivas en Iberoamérica para generar algunas propuestas de solución.

Para comprender mejor la propuesta te comentamos que las situaciones geopolíticas no se han vuelto conflictivas por motivos políticos, necesariamente, sino por variables alternativas, tales como los intereses económicos de bloques regionales o por actitudes conservadoras en lo que respecta a la cultura. No obstante, ha habido avances importantes en las relaciones bilaterales, gracias a la sólida gestión diplomática de los países en cuestión.

En esta Unidad, no es nuestra intención hablar de los conflictos acaecidos ni de los ámbitos en donde se generaron los conflictos sino, simplemente, de las causas que desembocaron en ellos.

Así pues, iremos desarrollando, a continuación, algunos temas relevantes para nuestra región y, fundamentalmente, para nuestro país.

1. Relaciones bilaterales conflictivas ALCA vs. ALBA.

Una de las grandes iniciativas de la Región es el acuerdo del ALCA (Área de Libre Comercio de las Américas), firmado en Miami, en 1994. Ha significado la intención de unir las economías americanas, incluyendo acuerdos existentes en la región, MERCOSUR; Comunidad Andina, etc.

Este acuerdo trae consigo críticas a favor y en contra. En cuanto a las primeras se habla de acceso a mercados, inversión, servicios, compras del sector público, solución de controversias, agricultura, propiedad intelectual, subsidios, derechos compensatorios y política de competencia. Como críticas en contra, que parecen más influyentes, refieren que sería el fin de las libertades económicas, el sometimiento a las decisiones de los países más poderosos, como Estados Unidos y Canadá; el libre ingreso de productos importados a las economías más débiles provocaría la destrucción de sus industrias nacionales, etc.

Lo cierto es que, al ALCA no se le ha dado, hasta la fecha, una oportunidad para crecer, motivo por el cual quedamos cortos para emitir un juicio a favor o en contra acerca de las bondades de su implementación.

Como un desafío para impedir la dispersión en las negociaciones, evitando que las naciones sudamericanas sean absorbidas por el acuerdo por el ALCA surge la Alternativa Bolivariana para América Latina y El Caribe (ALBA). Esta es una propuesta de integración diferente. Mientras el ALCA responde a los intereses del capital trasnacional y persigue la liberalización absoluta del comercio de bienes y servicios e inversiones, el ALBA pone el énfasis en la lucha contra la pobreza y la exclusión social y, por lo tanto, expresa los intereses de los pueblos latinoamericanos.

El ALBA se fundamenta en la creación de mecanismos para crear ventajas cooperativas entre las naciones que permitan compensar las asimetrías existentes entre los países del hemisferio. Se basa en la cooperación de fondos compensatorios para corregir las disparidades que colocan en desventaja a los países débiles frente a las primeras potencias. Por esta razón la propuesta del ALBA le otorga prioridad a la integración latinoamericana y a la negociación en bloques sub-regionales, abriendo nuevo espacios de consulta para profundizar el conocimiento de nuestras posiciones e identificar espacios de interés común que permitan constituir alianzas estratégicas y presentar posiciones comunes en el proceso de negociación. El desafío es impedir la dispersión en las negociaciones, evitando que las naciones hermanas se desgajen y sean absorbidas por la vorágine con que viene presionándose en función de un rápido acuerdo por el ALCA. (Fuente: www.alternativabolivariana.org)

2. Tratados bilaterales

Las relaciones bilaterales en el contexto iberoamericano no han estado exentas de problemas, y, por lo tanto, existe la obligación ética de mirar la realidad sin anteojeras ni prejuicios. Destacamos aquellas situaciones que afectan en forma más cercana a nuestra región.

1.1 Relaciones bilaterales entre Argentina y Uruguay

La instalación de una planta de celulosa de la firma finlandesa Botnia en el margen oriental de un río fronterizo de Uruguay ha marcado una relación de profunda disputa entre los gobiernos de Argentina y Uruguay. Desde el lado argentino se cuestiona el potencial contaminante de esa fábrica para el curso fluvial compartido y la población aledaña.

Represa de Itaipú

Represa de Yacyreta
Fuente: manjisolar.blogspot.com

Intensos esfuerzos se realizan para lograr un posible acuerdo sobre el conflicto; sin embargo, los contactos técnicos y diplomáticos bilaterales que se sucedieron no llegaron a buen puerto.

Actualmente, este conflicto, se dirime su instancia legal en la Corte Internacional de la Haya debido a una demanda presentada por Buenos Aires.

1.2 Relaciones Bilaterales Paraguay - Argentina, Paraguay - Brasil.

El Paraguay como Estado tiene una cuestión pendiente en el orden del día de las relaciones bilaterales, fundamentalmente, en lo que se refiere a los tratados que regulan el uso de energía que provienen de las dos grandes hidroeléctricas Itaipú y Yacyreta.

Un efecto negativo fue la inundación de kilómetros de territorio nacional, aunque fue prevista una indemnización a los afectados, aunque los beneficios de las represas beberían ser muchas veces mayor a los daños.

Una revisión altamente técnica, de cada una de las cláusulas permitirá hallar, en primer lugar, las decisiones que atentan contra la soberanía y aquellas que sí son injustas para las pretensiones del estado paraguayo, en segundo, a partir de allí proponer estrategias diplomáticas para mejorar el contenido de los tratados. Alguno de los reclamos paraguayos es un precio justo de venta (precio de mercado) de la energía eléctrica excedente, esto permitirá mayores ingresos al

TRATADO DE ITAIPÚ
El Tratado de Itaipú fue un acuerdo binacional entre Brasil y Paraguay firmado el 26 de abril de 1973.

TRATADO DE YACYRETA
El tratado de Yacyreta suscripto entre la República Argentina y la República de Paraguay con fecho 3 de noviembre de 1973.

Fuente: //es.wikipedia.org/wiki/Tratado_de_Itaip%C3%BA

Estado, pudiendo de esta forma desarrollar mejores programas en beneficio de la ciudadanía, es por ello que es un atentado contra los derechos humanos tanto sociales, políticos y económicos del Paraguay, pues se le priva a la población de beneficios que debería disfrutar.

Asimismo, la revisión de los tratados que normalizan el mejor aprovechamiento de las aguas del río Pilcomayo será hondamente beneficiosa para las actividades de la región chaqueña, pues suele ser muy penoso la situación de los compatriotas en tiempos de sequía, no teniendo agua potable para beber y viendo morir sus ganados y cultivos. Esta región suele ser conflictiva cuando se realizan desvío de las aguas del río Pilcomayo de modo arbitrario, del lado argentino.

Un grave problema también es la incursión de fuerzas del ejército Brasilero hasta treinta metros dentro del territorio paraguayo, suscitado en la quincena de noviembre de 2008, en el Departamento de Canindeju.

Suele ser conflictiva la situación cuando Brasil impone un estricto control en el Puente de la Amistad o limitando la cantidad de compras a realizarse en Paraguay. La zona de la triple frontera se acentúa la inseguridad y los crímenes por el narcotráfico y el contrabando que es práctica usual en la zona.

3. Debilitamiento de la identidad a consecuencia de la aculturación en zonas de frontera

Un fenómeno que ha acaecido en las fronteras paraguayas es la masiva incursión de modas extranjeras con el consecuente debilitamiento de la identidad cultural de los paraguayos. Esta situación se hace patente, sobre todo, en la música y en el idioma. Un medio importante de difusión cultural son los medios de comunicación, siendo por décadas predomino extranjero, además de esto, los sistemas de servicio como salud y educación están más desarrollados en los países limítrofes (Argentina y Brasil) siendo esta la causa de un fenómeno generalizado e ilegal, el de la doble nacionalidad para acceder a los beneficios que ofrecen los países vecinos.

Otro aspecto de inflexión de la presencia de personas de nacionalidad Paraguayo - Brasilera, es su cultura mestiza de ambas naciones, no se desestima el diálogo intercultural, sin embargo, al debilitar a la cultura propia del lugar es preocupante y merece una especial atención.

4. Políticas migratorias

Es importante que el Estado paraguayo revise su política migratoria a través de los instrumentos internacionales pertinentes con el objeto de reforzar la soberanía patria en diálogo respetuoso con las culturas regionales.

Las políticas migratorias, en el marco de las relaciones de cooperación, deben atacar los factores que favorecen la migración. En este sentido el desarrollo económico y social de todos los países es una necesidad imperiosa en el mundo actual, que se puede promover por medio de un pacto entre los países más afectados.

Atacar las causas que originan el fenómeno de la migración debe ser la consigna de los países asociados; disminuir la dependencia económica y otorgar posibilidades reales de desarrollo a los países de con menor desarrollo relativo.

Por décadas Argentina fue el lugar elegido de la gran masa de migrantes paraguayos que asciende a más de un millón, en la actualidad el flujo migratorio se redirecciona a Europa, especialmente España. Los países expulsores manifiestan consecuencias sociales muy profundas como ser la desarticulación de la familia que en su mayoría queda sin madre, quedando hijos con el padre, abuelos o encargados y ocasionando a la vez a mediano plazo otras consecuencias, primero el trauma, la indisciplina y luego la violencia, entre otros efectos. El beneficio a nivel país en grande, pues las remesas que envían los migrantes supera a monto de la producción de soja en millones de dólares.

Una activista de la FARC

Fuente: weblogs.clarin.com

5. Algunas relaciones dificultosas en la Región sudamericana

Reproducimos íntegramente algunas informaciones de los medios de comunicación referentes a, en primer lugar, la relación bilateral entre Colombia y Ecuador, afectada por un episodio; en segundo, la inclusión de Venezuela al MERCOSUR.

4.1 Relación bilateral entre Colombia y Ecuador, y la incursión de Venezuela

La situación de conflicto entre la República de Colombia y Ecuador se suscitó a consecuencia de un operativo militar colombiano que terminó con la muerte del número dos de la FARC, Raúl Reyes.

En ese sentido, según José Miguel Insulza, Secretario General de la OEA, sostuvo que falta mucho para resolver el conflicto entre Colombia y Ecuador: “habrá que trabajar mucho para resolver primero el problema provocado entre Ecuador y Colombia, y luego, determinar sus causas, agregó el titular de la OEA.

Insulza valora, sin embargo, el acuerdo alcanzado en el Consejo de la OEA que reafirmó la inviolabilidad del territorio entre Estados pero no condenó a Colombia por haber traspasado la frontera de Ecuador en el operativo aquel.

“No cabe sino declarar que ha habido una violación del artículo 21 de la carta de la OEA, pero al mismo tiempo el consejo quiso buscar alguna forma de acercamiento, y probablemente por eso evitó las palabras duras, sostuvo.

El diplomático reiteró además su llamado a bajar el tono en las declaraciones sobre este conflicto. “No hay amenazas de peligro inminente, pero para encontrar una solución a este problema lo mejor es bajar el tono a todas las declaraciones”, señaló.

Fuente: Declaraciones desde Washington a radio Cooperativa de Santiago de Chile, 06/03/2008; 09:46’.

En Brasil tampoco es desconocida la guerrilla propia como el Comando Capital y Comando Vermelho, suelen ser generadores de crímenes y delincuencia en todo el país.

Fuerzas Armadas Revolucionarias de Colombia (FARC)

Este grupo se autodenomina como una organización guerrillera de visión marxista-leninista, sin embargo los gobiernos de Colombia, Estados Unidos y la Unión Europea lo clasifican como una organización terrorista. Está integrado aproximadamente por 12,000 a 17,500 combatientes.

La triple frontera entre Brasil, Perú y Colombia es el bastión de la guerrilla colombiana, este lugar es todavía uno de los lugares más importantes de producción, procesamiento y salida de la cocaína hacia el mundo. También constituye la vía del lavado de dinero de los narcos sobrevivientes que actuaron a inicios de los 90 al servicio de los Carteles de Medellín y Cali.

Hoy.com.ec (25 XI 08)

4.2 Restricciones para la incorporación de otros estados al MERCOSUR y oposición a la misma.

Toda la prensa nacional se hace eco de otro conflicto de orden geopolítico que plantean algunos sectores críticos respecto a la inclusión de Venezuela en el MERCOSUR, debido a su aparente oposición a la política Norteamericana. No obstante, el MERCOSUR es hasta el momento una unión comercial y económica, no política. Sus estados miembros pueden concordar o discordar en sus políticas exteriores, como ha ocurrido muchas veces en el pasado.

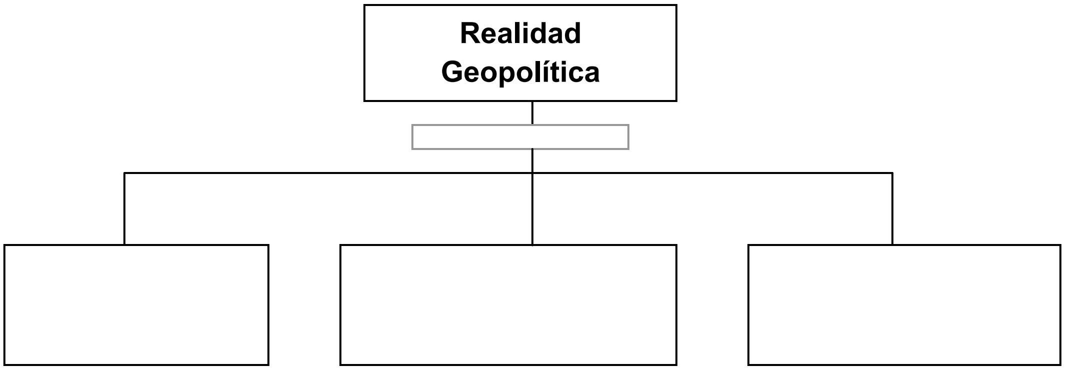
El proceso de integración no supone todavía la adopción de una política exterior común y sus miembros tienen plena soberanía en la toma de sus decisiones externas.

Es posible, sin embargo, que la incorporación de Venezuela al MERCOSUR represente en el futuro no sólo el afianzamiento económico del bloque, sino también algo más: un desmentido histórico a aquellos que pensaban que la despedida de San Martín y Bolívar en Guayaquil fue el último episodio de una gesta cargada solamente de utopías.

Fuente: www.abc.com.py/economía/html; 26 de noviembre de 2005.

En un ambiente donde te sientas cómodo disponte a trabajar solo/a con los ejercicios:

1- Completa el siguiente mapa conceptual, atendiendo las dimensiones de la realidad geopolítica iberoamericana (DIMENSIÓN CULTURAL, POLÍTICA, ETNICA)



2- Luego de una lectura exhaustiva de la primera parte de la Unidad, elige la dimensión que según tu parecer, es la más preponderante en la identidad iberoamericana. Argumenta la razón de tu elección.

Reúnanse en grupo, del mismo curso, y realicen los ejercicios para enriquecer sus conocimientos.

1- Genera propuestas de solución al problema de aculturación en áreas fronterizas atendiendo a las causas que la generan.

2- Contesta las siguientes interrogantes

- ¿Crees que puede existir otra forma de resolver los problemas sociales y que no sea con violencia? (como los grupos Guerrilleros), ¿Cuál sería esa forma?
- ¿Cómo debería ser nuestro país para que nuestros compatriotas que migraron regresen al Paraguay?
- ¿Cómo podemos contribuir para lograr que nuestro país sea un lugar mejor?

No te olvides de anotar la fuente, es decir, escribir el nombre del diario del cual obtuviste la información, el número de página y la fecha.

3- Busca en diarios actuales, informaciones acerca de la relación bilateral y multilateral entre los países del MERCOSUR, extrae ideas principales del artículo.

Realiza este sencillo trabajo para evaluar si has comprendido esta lección.

I- Genera propuestas de solución ante las situaciones geopolíticas iberoamericanas.

a) Renegociación de los tratados sobre utilización de recursos energéticos compartidos con otros países (Oleoductos, Gasoductos, Redes de distribución de Energía Eléctrica). ¿Cómo establecer un equilibrio entre ambos países en cuanto a los beneficios de la binacional y otros acuerdos?

____

____

b) ¿Por qué crees que el Paraguay no explora el petróleo del Chaco?.

____

____

c) Situación ilegal de compatriotas en tierras extranjeras.

d) Relación bilateral conflictiva entre Colombia y Ecuador

e) Inclusión de otros estados al bloque regional MERCOSUR

Luego de realizar los trabajos asignados, en un clima de diálogo, evalúen las actitudes manifiestas durante la elaboración del proyecto

Criterios	Sí	No
Voluntad para trabajar.		
Preocupación por el proyecto.		
Ayuda mutua.		
Autogestión.		
Participación activa.		

Para reforzar todo lo que aprendiste vuelve a repasar realizando los siguientes ejercicios.

> **El juicio**
>
> (Recuerda que el Juicio debes realizarlo observando **un bien moral:** costumbres socialmente aceptadas como buenas o positivas).
>
> En base a crítica del juicio de Imanuel Kant. 1790.

1. Establece la relación de causa y consecuencia de la situación geopolítica en Latinoamérica.

2. Realiza un juicio crítico sobre la situación geopolítica en Latinoamérica.

3. De todas afirmaciones selecciona la opción correcta. Puedes marcar con una "X" o subrayar la opción que elijas.

3.1. La preocupación principal en la dimensión ecológica es:

a) La superpoblación de la Tierra. ☐
b) El agotamiento del almacén. ☐
c) La extinción de los recursos naturales. ☐

3.2. La dimensión política es la más abstracta de todas en la sociedad actual porque:

a) El individuo es indiferente a toda cuestión política. ☐
b) Establece la relación de la persona en cuanto Ciudadano como un ente abstracto (el Estado). ☐
c) La política es solamente para los políticos ☐

3.3. En qué dimensión cultural te encuentras:

b) Afroamericana. ☐
c) Aborigen. ☐
d) Mestiza. ☐

LA LITERATURA COMO EXPRESIÓN SOCIOCULTURAL

Reflexiona

- Observa las siguientes imágenes.

FOTOS: www.daf.com.ar/shared/blog/twilight/two.jpg
spanish.millenniumcampaign.org/atf/cf/%7B2EF1

- ¿De qué te parece que conversan los jóvenes? Subráyalos.

- Una cita amorosa.
- Una declaración de amor.
- Una propuesta amorosa.

Imaginas que la embarazada es una de tus compañeras y fue abandonada por el padre de su hijo y decide igual tenerlo ¿Qué consejos le darías? Escribe tres enunciados al respecto.

A ---

B ---

C ---

En nuestra sociedad es una realidad que muchas mujeres son abandonadas por el padre de su hijo, donde ella a pesar de las adversidades trata de sobrellevarlas.

En el texto" Rosalía" de Mario Halley Mora que corresponde al género narrativo se relata una historia real de una esas mujeres abandonadas. Disfrútala.

ROSALÍA

La cosa había sucedido mucho tiempo atrás, cuando don Genaro era joven, tenía los músculos fuertes y no tenía los cabellos blancos de ahora. Había sido el mozo más gallardo, cantor y pendenciero del pueblo. Las mujeres suspiraban al paso airoso de su tordillo de larga cola peinada. Y fue una de ellas Rosalía González, quien una tarde le dio la noticia:
- Genaro, viá tené un hijo....

- Se le rió en la cara.
- Ese é tu problema mi hija...

Y se fue alejando, pensando que la mujer haría lo que hacían todas las que concebían un hijo sin padre.

Pero Rosalía fue distinta. Sorbió sus lágrimas y aguantó su vergüenza, con esa callada y heroica resignación de la mujer del campo que le debe todo, hasta su desgracia, al hombre.

Y Rosalía trajo al mundo un varón. Cuando el “mita’i” tenía dos meses, ella se lo trajo, para mostrárselo. Pero él se negó a verlo. Y Rosalía ya no volvió sino una sola vez, para decirle que....

- Patrocinio Colmán se quiere casar por mí. Y va a reconocer mi hijo.

- Iporaite aipóramo, mi hija.

Ella esperaba en vano. Él, Genaro Servián, no quería aquella carga. Si otro se responsabilizaba, en buena hora.

Pero allá en el fondo de su corazón, un celo oscuro empezó a tomar forma, y le acompañó siempre, a lo largo de sus años.

Y más aún cuando le vino la desgracia. Había atado, en aquel diciembre ardiente, a su tordillo en el sombreado pajonal que bordeaba el estero. Y fue hacia la siesta cuando escucho el relincho desesperado del animal. Salió corriendo, el pajonal ardía y el animal no podía zafarse. No pudo dejar morir al compañero de tantas horas y se metió entre las llamas.

Cuando volvió del Hospital, el fuego le había devorado en cicatrices en la cara, y la mano izquierda se le quedo para siempre agarrotada.

Se aisló en su rancho y vio pasar los años tristes de su pobreza. Por el camino veía pasar a veces a Patrocinio Colman, con su hijo, con el hijo que él no quiso, convertido en un robusto “mita-i” que se iba haciendo hombre. En esos días, la soledad le pesaba más, y en medio de ese sentimiento triste se deslizaba un hilillo luminoso de orgullo.

- Jhoo che ra’y -murmuraba, y cerraba los ojos, y soñaba que cabalgaban juntos, o que se iban al monte a tumbar árboles, para que él le enseñara a manejar el hacha a ese manojo de alegría y músculo joven que era su hijo.

Y ahora, el mozo tenía 20 años y una herencia de pendencia y desprecio hacia los demás. La historia se repetía. Era otra Rosalía que esperaba un hijo. El hijo de su hijo. La ofensa era imperdonable. El muchacho no aceptaba su responsabilidad y los hermanos de la mujer ofendida lo buscaron por los caminos.
- El hijo que no quiso caminaba quizá hacia su muerte. Le salió al encuentro.

Mario Halley Mora
(1926 - 2003)

Escritor más prolífico de nuestro país. Entre otras cosas fue, dramaturgo, narrador, periodista y poeta. Algunas de sus obras incluyen: *En busca de María* (1956), *Teatro Breve* (1984), *Los hombres de Celina* (novela; 1981), *Cuentos, microcuentos y anticuentos* (1987), *Amor de invierno* (novela; 1992) entre otras.

- ¿Adónde te vas, che ra'y? –le preguntó.

- Dicen que me buscan. Me voy adonde me encuentren....-le respondió el mozo con aire soberbio.

Quiso rogarle, contarle su historia de soledad. Gritarle a la cara que un hijo no se rechaza. Pero no pudo, porque se sintió orgulloso de aquella hombría que era la suya. Su razón o su muerte, y nada más.

Los hermanos de la muchacha eran tres. Pues bien, ellos serían dos.

- Me parece numá que podemo ir junto....

- Podemo, caraí – le respondió.

Entonces padre e hijo, reencontrados en una encrucijada de sangre, se fueron caminando juntos, a la búsqueda de un destino que si no les unió en la vida, podría unirlos en la muerte.

Mario Halley Mora

Relean el texto en grupo y realicen los planteamientos siguientes:

1- Acudan al Centro de Recursos para el Aprendizaje (CRA) de tu institución o a otras bibliotecas de tu comunidad e infórmense en libros de la Literatura Paraguaya sobre: quién fue el autor, sus datos biográficos, principales obras, etc.

2- Con la ayuda de un diccionario de la lengua española y otro de sinónimos, escriban el significado directo o denotativo de las siguientes palabras extraídas del texto leído. Luego, reflexionan sobre el sentido de estos vocablos en el texto.

- pendenciero
- pajonal
- zafarse
- encrucijada

3- ¿Qué ideas expresan estas frases? Comenten.

a- "Había sido el mozo más gallardo, cantor y pendenciero del pueblo".

b- "…no quería aquella carga".

c- "…el pajonal ardía y el animal no podía zafarse".

d- "…su razón o su muerte y nada más".

4- Expliquen qué situaciones sociales derivan de estas expresiones:

"*Había sido el mozo más gallardo, cantor y pendenciero del pueblo. Las mujeres suspiraban al paso airoso de su tordillo de larga cola peinada. Y fue una de ellas Rosalía González, quien una tarde le dio la noticia:*

- Genaro, viá tené un hijo....

Se le rió en la cara.

- Ese é tu problema mi hija...

Y se fue alejando, pensando que la mujer haría lo que hacían todas las que concebían un hijo sin padre".

5- Reconozcan en el texto y comenten:

- características del hombre que enamoran a las mujeres.
- expresiones que aluden al machismo.
- el sentimiento o resignación de la mujer.
- el comportamiento del hombre ante la nueva situación planteada.

6- ¿Qué problemas sociales resumen las siguientes expresiones tomadas del texto?

a- "Se aisló en su rancho y vio pasar los años tristes de su pobreza".

b- "En esos días la soledad le pesaba más, y en medio de ese sentimiento triste se deslizaba un hililllo luminoso de orgullo".

c- "Quiso rogarle, contarle su historia de soledad"

7- Reconozcan en el texto qué expresiones ilustran el castellano utilizado en el cuento por los personajes principales y luego comenten.

- Rosalía (Ej.: "viá tené un hijo…")
- Genaro (Ej.: "ese e tu problema mi hija…")
- Hijo (Ej.: "podemo, caraí…")

8- ¿A qué género literario pertenece? FUNDAMENTA.

Estas series de planteamientos te permitirán una adecuada fijación y aplicación de tus saberes.

¡Trabaja solito!

Consigue una canción que trate el tema de una mujer embarazada y/o abandonada, por ejemplo, "Pájaro que comió voló", de Rodrigo y realiza los planteamientos que siguen:

1- Copia la letra de la canción seleccionada

2- Compara las ideas que te sugiere la canción escuchada con el texto leído

3-¿Qué mensajes deja la música encontrada?

4-Extrae los valores y antivalores de la canción seleccionada.

5-Crea una historia real, basandote en hechos que han ocurrido en tu entorno.

3- Comparta tus conclusiones con el tutor

Luego del análisis de la obra, realiza los siguientes planteamientos:

1- Opina sobre la decisión de Rosalía de tener a su hijo a pesar de la negativa de Genaro.

2- Juzga la decisión de Genaro de abandonar a su suerte a Rosalía.

3- Escribe algún SLOGAN, sobre la paternidad responsable.

Luego del análisis de un texto narrativo, te introducirás al mundo de la lírica, es decir, a todo lo concerniente a la poesía: versificación, licencias poéticas, recursos literarios, entre otros.

Versificación

En el análisis de una poesía se tienen en cuenta varios aspectos, entre ellos la métrica; es decir, la cantidad de sílabas con que cuenta cada verso.

Para medir el verso, se toman en cuenta las licencias poéticas que son:

ELEMENTOS DEL VERSO

Medida: constituye el número de sílabas por verso.

Ritmo: consiste en la armonía producida por la distribución de los acentos en cada verso.

Rima: consiste en la semejanza de sonidos en las terminaciones de dos o más versos.

a - Sinalefa: consiste en formar una sola sílaba con la última vocal de una palabra y la primera vocal de la siguiente. Esta licencia sirve para acortar el verso y se marcará de esta manera ∪**.**

Ejemplo:

No du-déis de **la ex**-cel-sa vir-tud de la poe-sí-a

∪

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14

b- Diéresis: consiste en separar dos vocales que deberían formar un diptongo. Sirve para alargar el verso.

Ejemplo:

La del **que hu**-ye del mun-da-nal r**u-i-**do

∪

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

c- Sinéresis: consiste en la formación de un diptongo dentro de una palabra entre dos vocales que por sí solas no lo formarían. Esta licencia es muy rara en el verso. Esta licencia permite acortar el verso.

Ejemplo:

Vi-no, sen-ti-mien-to, gui-ta-rra y **poe**-sí-a = 12 sílabas

Manuel Ortiz Guerrero

(Villarrica, 1894 - Asunción, 1933)

Poeta y dramaturgo. Uno de los principales representante del Modernismo paraguayo. Entre sus obras sobresalen: *Surgente* (1922) y *Pepitas* (1930).

d- Últimas palabras del verso:

- Si el verso acaba con una palabra aguda o monosilábica, deberemos sumar una sílaba al cómputo resultante. Ejemplo:

Co-mo se a-do-ra a Dios an-te su al-**tar**

∪ ∪ ∪

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 +1= 11

- Si la última palabra del verso es esdrújula, se le resta una sílaba al total. Ejemplo:

Con ca-pi-ta-nes ru-bios co-mo ar-**cán**-ge-les

∪

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 –1= 11

- Si la última palabra es llana, no se altera el número de sílaba que tiene el verso.

Ejemplo:

Per-do-nad-me es-te mo-do de ser mu-ni-fi-**cen**-te

∪

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14

De acuerdo con el número de sílabas, los versos se clasifican en:

Versos de arte menor	Versos de arte mayor
Bisílabos: 2 sílabas	*Eneasílabos*: 9 sílabas
Trisílabos: 3 sílabas	*Decasílabos*: 10 sílabas
Tetrasílabos: 4 sílabas	*Endecasílabos*: 11 sílabas
Pentasílabos: 5 sílabas	*Dodecasílabos*: 12 sílabas
Hexasílabos: 6 sílabas	*Tridecasílabos*: 13 sílabas
Heptasílabos: 7 sílabas	*Alejandrinos*: 14 sílabas
Octosílabos: 8 sílabas	

En las obras literarias y, en especial, en las poesías, son utilizadas las figuras literarias, cuyo propósito es embellecer el lenguaje con el fin de llamar la atención del lector. Aunque existe un gran número de recursos estilísticos, a continuación, te ofrecemos sólo los más frecuentes:

Figuras literarias basadas en el significado

Comparación: consiste en establecer una relación de semejanza entre dos objetos o hechos. Ejemplos: "y me ofreció sus mejillas / como quien pierde un tesoro" (J. R. Jiménez); "tengo la cabeza como un bombo"; "Como se arranca el hierro de una herida / su amor de las entrañas me arranqué" (Bécquer).

Metáfora: consiste en nombrar una cosa con el nombre de otra con la cual guarda una relación de semejanza, real o ficticia. Ejemplo: "En mi médula anidan zorzales peregrinos".

"Las perlas de tu boca"; "El sol es un globo de fuego, / la luna es un disco morado" (A. Machado).

Su cabellera es una cascada de oro.

Tiene dientes de perla.

Metonimia: se trata de nombrar un objeto con el nombre de otro, como los dos recursos anteriores, aunque en este caso no por razones de semejanza, sino por proximidad física o significativa. Ejemplos: el trompeta –en una banda de música-; un Miguel Ángel –una pintura de Miguel Ángel; una guitarra famosa – en vez del nombre del artista.

Antítesis: consiste en la oposición de palabras o ideas. Ejemplo: “Cuando estoy alegre, lloro, / cuando estoy triste, me río” (M. Machado).

Paradoja: es la asociación de dos o más ideas aparentemente opuestas, contradictorias o absurdas, que encierra significación poética. Ejemplos: “Del lodo se levantan los lirios matutinos”

“La música callada, / la soledad sonora” (San Juan de la Cruz); “muero porque no muero” (Santa Teresa de Jesús).

Hipérbole: consiste en exagerar al máximo, la realidad de lo que se dice. Ejemplo: “En mi médula anidan zorzales peregrinos”.

“Tanto dolor se agrupa en mi costado, / que por doler me duele hasta el aliento” (Miguel Hernández).

"Llovió todo el día"

"Llovió más de mil veces"

Personificación: es la atribución de cualidades humanas a seres animados o inanimados. Ejemplos: “No dudéis de la excelsa virtud de la poesía”.

“La heroica ciudad dormía la siesta” (Clarín). “La luna se desnuda detrás de la arboleda” (Josefina Plá).

Ironía: consiste en expresar lo contrario de lo que en realidad se piensa o siente. Habitualmente este recurso suele ir acompañado por un tono burlesco. Es muy frecuente en el habla coloquial. Ejemplo: “¡Uf, qué frío!” (a 40º).

TIPOS DE RIMAS

Perfecta o consonante: cuando desde la última vocal acentuada se repiten todos los sonidos, tanto vocálicos como consonánticos. *Ejemplo*:

…hermanan en una
dulzura de luna

Imperfecta o asonante: cuando desde la última vocal acentuada sólo se repiten los sonidos vocálicos.

Ejemplo:

sobre el oscuro campo de batAllA,
en el silencio de la noche vAgA.

Figuras literarias basadas en el sonido

Aliteración: es la repetición de sonidos, sobre todo consonánticos, a lo largo de un verso o de una estrofa. Ejemplo: “con el ala aleve del leve abanico” (Rubén Darío).

Onomatopeya: consiste en la imitación de sonidos de la naturaleza. Ejemplos: ¡boom! ¡zas! ¡pío pío! ¡guau guau!

Paranomasia: utilización de palabras de sonido parecido, aunque con distinto significado: “como tontos, como tantos, como todos” (Gabriel Celaya).

Figuras literarias de tipo gramatical

Epíteto: suelen ser adjetivos que destacan una cualidad de un sustantivo que es suficientemente conocida y aceptada. Ejemplo: verde hierba, blanca nieve. El azul cielo. La perfumada rosa.

Pleonasmo: consiste en añadir palabras innecesarias con valor enfático o vigorizante. Suele ser muy corriente en el habla coloquial. Ejemplo: *Lo vi con mis propios ojos. Subí para arriba.*

Elipsis: es la supresión de algunos elementos en un verso ya que quedan sobreentendidos. Este recurso dota al poema de rapidez, brevedad y concisión. Ejemplo: “Por una mirada, un mundo; por una sonrisa, un cielo; por un beso... ¡yo no sé qué te diera por un beso” (Bécquer).

Hipérbaton: consiste en la alteración del orden lógico de las palabras en una frase u oración. Ejemplos: “…succionan impurezas vinos de grata umbría…”

“Volverán las oscuras golondrinas de tu balcón sus nidos a colgar” (Bécquer).

“A los pueblos de América infausto, tres centurias un cetro oprimió”

(Himno Nacional Paraguayo)

Polisíndeton: utilización de más conjunciones de las que son necesarias. Dota al verso de lentitud y solemnidad. Ejemplos: “Alguien barre / y canta / y barre / -zuecos en la madrugada” (Rafael Alberti).

Y sufre tanto cada noche,

Y ofrece tantas sutiles tentaciones
Y son tan duras sus lágrimas
Y tan bárbaras y sentimentales

Estructura de las rimas

La estructuración de las rimas se realiza agrupando las terminaciones semejantes por medio de letras, empezando siempre con “a” (minúscula) si los versos son de arte menor (hasta 8 sílabas), y con “A” (mayúscula), si son de arte mayor (más de 8 sílabas). Ejemplo:

Lágrimas que no pudieron (a)
tanta dureza ablandar, (b)
yo las volveré a la mar, (b)
pues que de la mar salieron. (a)

(Ginés Pérez de Hita)

Asíndeton: consiste en la omisión de conjunciones, para dar mayor vigor y dinamismo a la expresión. Ejemplo: “Para la libertad, sangro, lucho, pervivo” (Miguel Hernández).

Rendí, rompí, derribé, rajé, deshice, prendí, desafié, desmentí.

Anáfora: consiste en la repetición de una o más palabras al comienzo de varios versos, frases u oraciones para conseguir mayor armonía. Ejemplos: ¿Por qué fue desterrada la azucena, por qué la alondra se quedó sin vuelo, por qué el aire de mayo se hizo pena bajo la dura soledad del cielo? (Rafael Morales).

"En cada rocío del amanecer
En cada sonrisa de un niño
En cada persona que sufre
Ahí está Dios"

A continuación, se presenta una obra perteneciente a la Literatura paraguaya, esta vez se trata de una poesía escrita por el poeta guaireño Manuel Ortiz Guerrero.

Utiliza las siguientes palabras creando versos a un ser querido:

Esplendidez, magnificencia, excelsitud, generosidad, desprendimiento, galantería.

El titulo de la siguiente poesía es Munificencia ¿Qué relación encuentras con las palabras utilizadas en tus versos?

¿Las has relacionada? ¿Son sinónimas? ¿Las conocías antes?

Ahora bien disfruta de la poesía:

Verso alejandrino es el verso de catorce sílabas métricas compuesto de dos hemistiquios de siete sílabas.

Su nombre proviene de la composición *Roman d'Alexandre*, poema escrito por *Le Tors* y *Alexandre de Berney* fechado en el siglo XII. Fue muy usado en la lírica del Mester de Clerecía.

MUNIFICENCIA

¿Por qué extrañáis, amigos, que yo también sonría,
que también yo os regale con rosas y con trinos,
si en mi jardín interno jamás hubo sequía,
y en mi médula anidan zorzales peregrinos?

No dudéis de la excelsa virtud de la poesía.
Del lodo se levantan los lirios matutinos;
succionan impurezas viñas de grata umbría
cuyos maduros frutos dan los sagrados vinos.

No dudéis de la excelsa virtud de la poesía.
La peste, el hambre, el frío son fantasmas mezquinos
que inútilmente rondan por la soledad mía

desde hace diez años, sin mirarme de frente.
Y, pues no tengo oro, reparto rosa, trinos…
Perdonadme este modo de ser munificente.

SONETO

Es una poesía de catorce versos, generalmente endecasílabos, distribuidos en dos cuartetos (estrofa de cuatro versos) y dos tercetos (estrofa de tres versos).

Manuel Ortiz Guerrero

Del libro Nubes del Este / Asunción 1928
http://www.revistacontratiempo.com.ar/manuel_ortiz_guerrero.htm

En forma individual realiza los siguientes planteamientos:

LA PROSA Y EL VERSO

Prosa: es la manera espontánea de hablar y escribir respetando únicamente las reglas gramaticales de la lengua. Puede adoptar cualquier forma de expresión literaria: narración, descripción, diálogo, etc. o combinarlas entre sí.

Verso: es una forma de expresión que se adecua, además de las reglas gramaticales, a unas normas de ritmo, rima y medida, o sólo ritmo. Es cada línea de la poesía.

1 - Relaciona cada palabra con su sinónimo contextual:

a. Munificente: …..alma, espíritu
b. Trinos: …..oscuridad
c. Excelsa: …..generoso
d. Umbría: …..cantos
e. Médula: …..admirable, maravillosa

2 - Responde las siguientes preguntas:

a- ¿Cuál es la situación planteada en el poema?

b- ¿Cuál es la idea que quiere transmitir el poeta?

c- ¿Cómo se ve a sí mismo el poeta? ¿Por qué?

3 - Explica con tus palabras lo que el poeta quiere transmitir a través de las siguientes frases:

a- "…en mi jardín interno jamás hubo sequía"

b- "Del lodo se levantan los lirios matutinos"

c- "Y, pues no tengo oro, reparto rosas, trinos…"

4 - Extrae del poema.

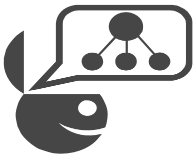
a. ideas más significativa, principal o nuclear de cada estrofa:
b. tema o macroestructura del texto. (Uniendo las cuatro ideas principales de las estrofas en un solo enunciado, sintetizando las palabras).
c. recursos literarios:

- metáfora
- comparación
- adjetivación
- hipérbole

5 - Determina la estructura del poema:

- números de estrofa:
- número de versos de cada estrofa:
- nombres de las estrofas:
- total de versos:
- nombre genérico textual.
- tipo de rima. Justifiquen.
- estructura de las rima.

6- Investiga en la biblioteca de la institución otros datos relevantes sobre el autor.



En una actitud reflexiva analiza el alcance de lo que has aprendido respondiendo la interrogante planteada

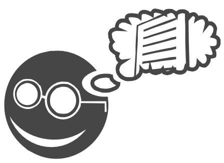
¿Qué efectos ha producido en ti la lectura del poema? Intercambia tus opiniones y escriba una conclusión.

____

____

____

____



Comprueba cuánto aprendiste realizando el siguiente planteamiento:

Escribe un poema sobre el tema que elijas aplicando todos los saberes aprendidos. (Un vocabulario poético te ayudará para la producción)

LA HERENCIA: UN FENÓMENO FASCINANTE

Ahora que ya conoces cuales son las acciones éticas que debes realizar en un contexto geopolítico en Paraguay e Iberoamérica. Tú como persona puedes generar estrategias de solución a situaciones conflictivas.

Es preciso que comprendas la composición genética de tu organismo y cómo se transmiten los caracteres hereditarios de los padres a los hijos e hijas. Hasta podrás analizar algunas deformaciones que pueden presentar el cuerpo humano y que ante estos problemas los culpables no son los padres sino que está en los cromosomas y la falla ocurrió cuando se unieron el óvulo y el espermatozoide.

En este apartado podrás analizar diferentes situaciones vivenciadas en tu entorno hasta en tu propia familia.

GENÉTICA

Te preguntaste alguna vez sobre porqué se parecen los individuos de las diferentes especies (unos a otros) o por qué tú posees rasgos semejantes a la de tus padres…

Esto se debe a que cada organismo posee cromosomas que se organizan en todas las células del cuerpo y contienen la información que determina todas las características del individuo.

La HERENCIA se refiere a que la descendencia tiende a asemejarse a sus padres , basándonos en el hecho de que nuestro aspecto externo y función biológica, es decir, nuestro FENOTIPO, viene determinado en gran medida por nuestra constitución genética, es, nuestro GENOTIPO.

En todos los seres vivos cada especie se parece a su progenitor debido a su "herencia".

Foto: Reserva Carmen – Hernandarias

La "Genética" es la ciencia que se encarga del estudio científico de cómo se transmiten los caracteres físicos, bioquímicos y de comportamiento de padres a hijos.

Espero que te sirva esta explicación y que haya aclarado tu duda de lo contrario acude junto al tutor especialista.

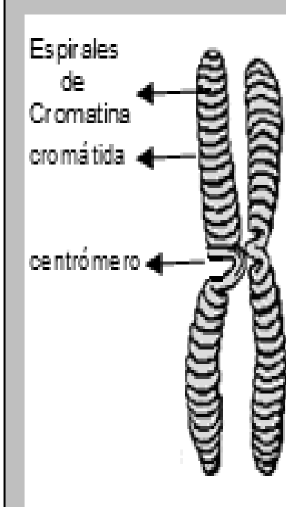
Ahora te habrás preguntado ¿Para qué se dividen las células? y ¿Qué funciones cumplen?

La división de las células somáticas del cuerpo se denomina "**Mitosis** "y cuando ocurre en los gametos masculino y femenino (óvulo y espermatozoide) se denomina "**Meiosis**"

1. La mitosis o división de las células somáticas

La división que mantiene la calidad y cantidad de cromosomas en la especie pasa por una serie de fases que son:

ESTRUCTURA DE UN CROMOSOMA



Los cromosomas se encuentran en el núcleo de las diferentes células. Cada cromosoma consta de dos brazos denominadas cromátida.

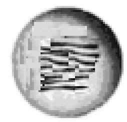
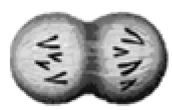
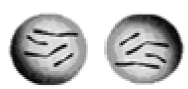
ENTÉRATE QUE...

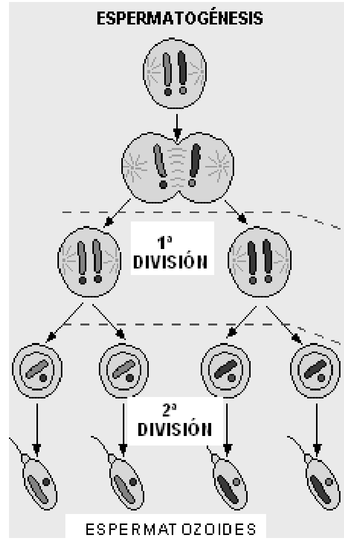
Una célula Haploide: es aquella que posee cromosoma no dispuestos en pares.

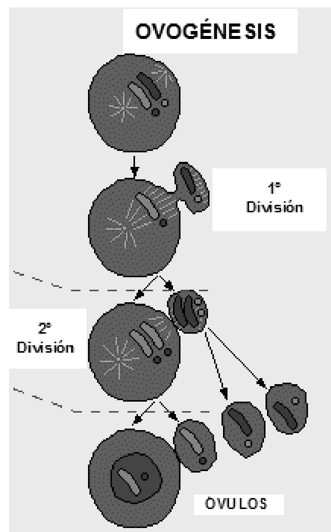
Es la mitad "n" de la especie.

Una célula Diploide: es aquella que posee cromosomas dispuesto en pares.

El número normal de la especia "2n".

Interfase: es el proceso en el cual la célula no se encuentra en proceso de división. En esta fase se forman las proteínas y otros compuestos, se almacena la energía y se duplica el ADN.	INTERFASE 
Profase: en el núcleo la cromatina comienza a condensarse y se observan los cromosomas en forma de V o J, el nucléolo, la membrana nuclear, en el citoplasma los centrosoma se duplican formando diplosoma y se dirige a los polos el huso acromático.	PROFASE 
Metafase: los cromosomas se disponen en el plano ecuatorial unidos por su centrómero al huso acromático.	METAFASE 
Anafase: los cromosomas comienzan a separar sus cromátidas y migran hacia los polos de la célula, unidos a las fibras del huso.	ANAFASE 
Telofase: los cromosomas llegan a los polos y se regenera el núcleo celular, el centrosoma se ubica en el citoplasma y comienza el proceso de invaginación del citoplasma. **Citocinesis:** termina separándose las dos células hijas (animal) o quedan unidas (vegetal).	TELOFASE 





La Meiosis

Consiste en una división reduccional de las células de los gametos (óvulo y espermatozoide). En este proceso hay dos divisiones y las células resultantes son haploides, es decir, tienen la mitad del número de cromosomas de la especie.

El proceso de formación de espermatozoides recibe el nombre de "**Espermatogénesis**" y el de la formación de óvulos se llama "**Ovogénesis**"

El proceso de formación de las células reproductivas masculinas (espermatozoides) y femeninas (óvulos) se realiza mediante el proceso denominado meiosis.

Espermatogénesis: es el proceso de formación de los espermatozoides. Estos, son células haploides, es decir, tienen la mitad de los cromosomas que una célula somática. La reducción se produce mediante una división celular peculiar, la meiosis.

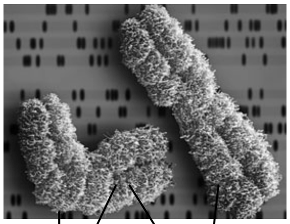
Ovogénesis: es el proceso de formación del gameto femenino, el óvulo. El óvulo es una célula haploide, es decir, posee la mitad de los cromosomas de las células somáticas. Esto hace necesario que se produzca una división celular distintiva, la meiosis.

PARA SABER MÁS...

Se llama centrosoma así al corpúsculo celular situado en el citoplasma cerca del núcleo. Está presente en todas las células y consta de uno o dos centriolos y unos filamentos radiales que forman el áster.

En la Meiosis ocurren dos divisiones:

Antes de la Primera División ocurre la interfase que es el periodo comprendido entre el final y el inicio de la mitosis. Se caracteriza por una intensa actividad que son: síntesis de proteínas, duplicación del ADN.



Cromátidas hermanas	Cromosomas homólogos.

Primera División o Meiosis I (PETER, Alexander):

Profase I: donde la cromatina se acorta y se condensa. Los cromosomas comienzan a hacerse visibles. En esta etapa ocurre algo diferente que en la mitosis los cromosomas homólogos se entrecruzan y se unen a través del centrómero formando una tétrada (proceso denominado **sinapsis**).

Metafase I: las tétradas se alinean en el ecuador de la célula. Cada cromosoma está pegado a una de las fibras del huso.

Anafase I: los pares homólogos de cromosomas se separan y comienzan migrar hacia los polos con la mitad de cromosomas.

Telofase I: los cromosomas han llegado a los polos y se divide el citoplasma formando dos células. Cada célula contiene un miembro de cada par homólogo (resultante de la sinapsis).

ENTÈRATE QUE...

La estructura tridimensional en forma de doble hélice de la molécula de ADN fue demostrada por James D. Watson y Francis Crick en 1953 a partir de sus componentes fundamentales (azúcar, base nitrogenada y fósforo) que forman un nuceótido.

SABÍAS QUE...

Cada cromosoma puede tener cientos de miles de genes (en los seres humanos aproximadamente 100.000).

Así se completa la Primera división de la meiosis dando lugar a la Segunda división o Meiosis II que consta de las siguientes fases:

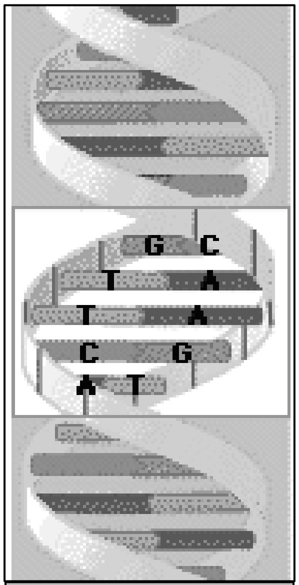
Profase II: los cromosomas se visualizan, el centrosoma se separa y se dirige a los polos.

Metafase II: la cromátidas (que están pegadas al centrómero) se mueven hacia el Ecuador de la célula.

Anafase II: las cromátidas se separan y cada una se dirige hacia polos opuestos.

Telofase II: los cromosomas llegaron a los polos, el citoplasma se divide formando cada una dos células hijas con un número haploide de cromosoma.

Como ya lo has visto en todo proceso de división celular se pueden visualizar los cromosomas.



El ADN es una estructura de doble hélice helicoidal, es decir es una cadena semejante a una escalera pero enrollada.

Foto: ENCARTA, 2004

Hablemos más de los cromosomas

Cromosomas (del griego **chroma**, color, y soma, cuerpo o elemento).Parte del núcleo de una célula semejante a una cuerda que almacena las instrucciones para la célula .En el núcleo de cada célula hay 46 cromosomas (22 pares somáticos más 1 par sexual)

También contiene una serie de genes y se presentan en pares homólogos. Constan de las siguientes partes: un centrómero (que es el centro) y brazos. Cada brazo constituye una cromátidas, éstas son idénticas entre sí porque contienen dos copias iguales de ADN y están unidas por el CENTRÓMERO por lo que reciben el nombre de "**cromátidas hermanas**".

Composición de los cromosomas

Los cromosomas están formados por un material complejo llamado cromatina, el cual consiste en fibras que contienen alrededor de 60% de proteínas, 35% ADN (Ácido Desoxirribonucleico) y 5% de ARN (Ácido Ribonucleico)

SABÍAS QUE...

* La secuencia de las Bases Nitrogenadas determinan las propiedades del gen.

* Los científicos utilizan estas secuencias para localizar la posición de los genes en los cromosomas y elaborar el mapa del genoma humano.

El ADN

Son las siglas del Ácido desoxirribonucleico (ADN) y es el material genético de todos los organismos celulares y casi todos los virus. El ADN lleva la información necesaria para su replicación y así pasar todas las informaciones de una célula a otra. Es por eso que los progenitores (padres /madres) pueden transmitir sus informaciones genéticas a sus descendientes (hijos e hijas).

Estructura de un ADN

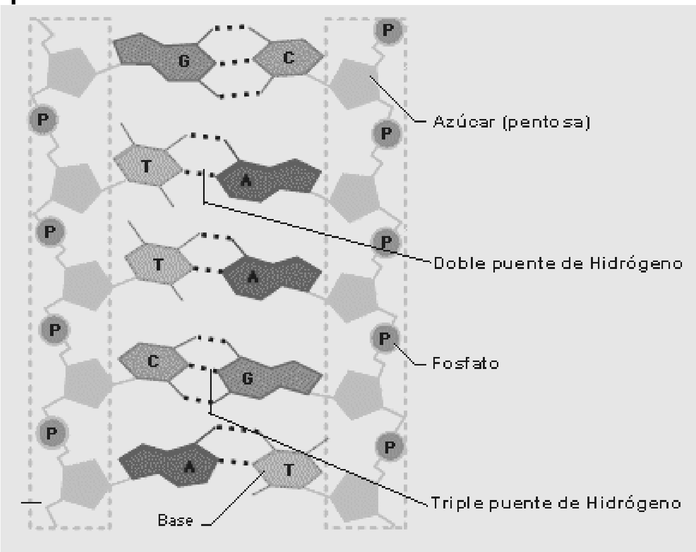
El ADN se parece a una escalera en caracol y está compuesta por Bases Nitrogenadas (Adenina, Timina, Citosina y Guanina), sal (Fosfato) y azúcar (Pentosa).
Los extremos de la cadena la constituyen el Fosfato y la Pentosa y la parte interna (los peldaños) las bases nitrogenadas (la Adenina con la Timina y la Citosina con la Guanina).

Una porción de ADN lo constituye el "GEN"

GEN

Es el material genético que determina la herencia de una característica determinada o de un grupo de ellas.
Los genes están localizados en los cromosomas en el núcleo celular y se disponen en línea a lo largo de cada uno de ellos. Cada gen ocupa en el cromosoma una posición, o locus.

Desdoblando la cadena de ADN para su estudio queda así:



La cadena de ADN es semejante a una escalera donde las hélice la constituyen el fosfato y el azúcar y los peldaños la Bases Nitrogenadas.

Foto: ENCARTA, 2006

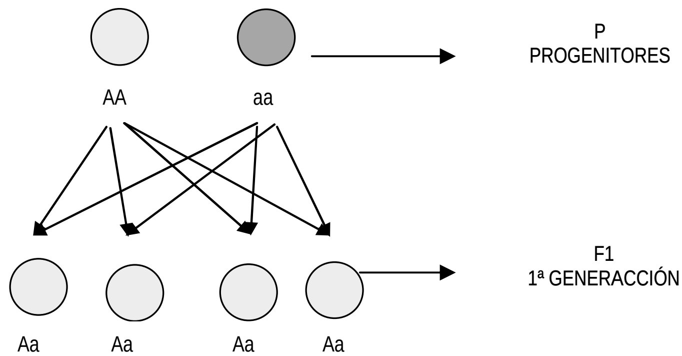
ORIGEN DE LA GENÉTICA

Como ciencia, la Genética nació en el año 1900, cuando algunos investigadores han descubierto y publicado los trabajos de un monje austriaco quien ha trabajado con semillas de guisantes (chícharo). Ese monje fue Gregor Mendel.

En sus experiencias Mendel describió los patrones de la herencia en función de siete pares de rasgos contrastantes que aparecían en siete variedades diferentes de esta planta. Observó que los caracteres se heredaban como unidades separadas, y cada una de ellas lo hacía de forma independiente con respecto a las otras. Señaló que cada progenitor tiene pares de unidades, pero que sólo aporta una unidad de cada pareja a su descendiente. Más tarde, las unidades descritas por Mendel recibieron el nombre de genes.

LEYES DE MENDEL

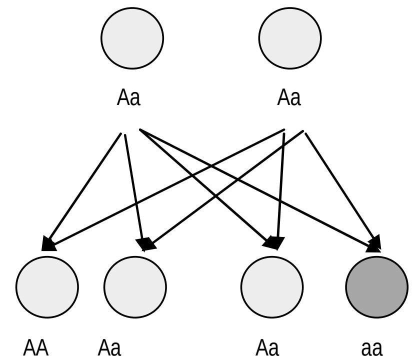
Los descubrimientos de Mendel lo llevaron a describir la explicación tres principios importantes de la herencia y son: **Dominancia, Segregación y Distribución Independiente** (**VILLE, 1996**). Hoy lo conocemos como Leyes.



Primera Ley de Dominancia, aquí se establece la total predominancia del gen sobre otro en un híbrido (raza no pura).

Ejemplo: cruzó dos semillas una amarilla y otra verde y como resultado obtuvo semillas todas amarillas.

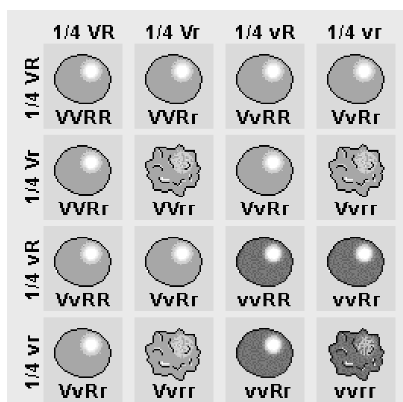
Lo que lo llevó a determinar que existían características que dominaban sobre otras.



Segunda Ley de Segregación: en esta ley concibe la idea de herencia mezclada. ´

Ejemplo: Mendel tomó plantas procedentes de las semillas de la primera generación (F1) del experimento anterior y las polinizó entre sí. Del cruce obtuvo semillas amarillas y verdes en la proporción que se indica en la figura 3.

Así pues, aunque el alelo que determina la coloración verde de las semillas parecía haber desaparecido en la primera generación filial, vuelve a manifestarse en esta segunda generación.



Tercera Ley de distribución Independiente: hace referencia al caso de que se contemplen dos caracteres distintos. Cada par de alelos que controla un carácter se transmite independientemente de cualquier otro par de alelos que controle otro carácter.

Composición genética de los seres vivos

Todos los individuos poseen 2 alelos, es decir informaciones genéticas de dos progenitores en el caso de los seres humanos una proveniente del padre y otra de la madre, podemos representar los alelos con letras, ejemplo: A, R, T… Existen caracteres que dominan sobre otras, como por ejemplo: el color negro para los ojos o el amarillo para las semillas, en este caso las que dominan las representaremos con letras mayúsculas (A, R, T…) y las no dominantes, llamadas recesivas, las representaremos con letras minúsculas (a, r, t…).

Los individuos que poseen los alelos iguales son re razas puras y se llaman Homocigotas. Ejemplo: AA cuando poseen características dominantes ¨**Homocigota Dominante**¨ y aa cuando poseen características no dominantes ¨**Homocigota Recesivo**¨

SABÍAS QUE…

Alelo: la distinta forma de un mismo gen, es decir, un gen del padre y uno de la madre.

En el Tablero de Punnett podrás identificar:

V, v, R, r y son cuatro caracteres diferentes, y se distribuyen dos caracteres por par, ejemplo: VVRR…y resultan 8 caracteres diferentes.

Los individuos que poseen los alelos no iguales, no son de razas puras, es decir son híbridos y se los denomina ¨**Heterocigoto**¨. Ejemplo: Aa

En un cruce

Como ya sabes los seres vivos se parecen a sus progenitores (padres o madres) porque los genes que posee cada organismo en el interior de sus células es portador de los caracteres hereditarios (color de ojo, cabellos, estatura…)

Considerando la experiencia que realizó Mendel podemos experimentar:

En las semillas el color amarillo domina sobre el verde. Supongamos que para el color amarillo utilicemos esta representación ¨A¨ y para verde ¨a¨. Si cruzamos dos semillas: una amarilla (homocigota) y una verde (homocigota). Entonces tendremos:

AA= amarillo

aa= verde

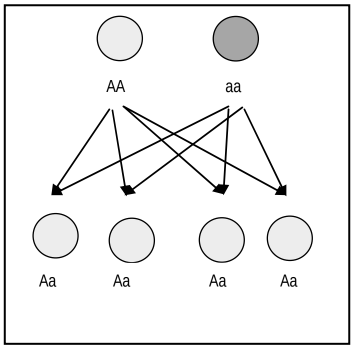
Probabilidad

La probabilidad es el estudio de la forma en que operan las leyes del azar, es decir, a la posibilidad de que ocurra cierto evento. Por ejemplo: obtener la cara al tirar una moneda al aire.

Matemáticamente podemos decir que:

Probabilidad =	Nº de veces que ocurre el evento
	Nº total de eventos posibles

Guía para realizar un cruce monohíbrido



A) Donde se cruzan los Progenitores y resultan los organismos de la Primera generación:

Resultado:

El fenotipo es la característica física externa de un organismo (de la descendencia) en este cruce tendremos:

100 % semillas amarillas

El Genotipo, es la característica genética de un organismo. En este cruce tendremos:

100% organismos heterocigotos (Aa)

La razón del Fenotipo es es: 1 (pues todas las semillas resultantes del cruce son amarillas)

También se puede usar la Tabla de Punnett que predice también las proporciones de los genotipos y fenotipos en los descendientes de un cruce y se estructura de la siguiente manera:

	A	A
a	Aa	Aa
a	Aa	Aa

Se coloca en la parte ***Horizontal Superior*** uno de los alelos, ejemplo: AA y en la parte ***Inferior Vertical*** otro de los alelos, ejemplo: aa y se multiplican algebraicamente los alelos de la parte horizontal con los alelos de la parte vertical.

B) Cruce de descendientes de la Primera Generación (F1):

Aa (Amarillo heterocigota) por Aa (Amarillo heterocigota)

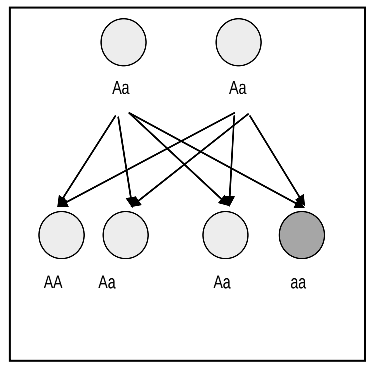
Fenotipo: 75 % semillas amarillas y 25% semillas verdes.

La razón del Fenotipo es: 3:1

Genotipo: 25% homocigota dominante (AA), 50% heterocigoto (Aa) y 25% homocigota recesivo.

Tablero de Punnett

	A	a
A	AA	Aa
a	Aa	aa



C) Cruce de descendientes de la segunda Generación (F2):

1. Se cruzan Aa (amarillo heterocigota) por aa (verde homocigota recesivo)

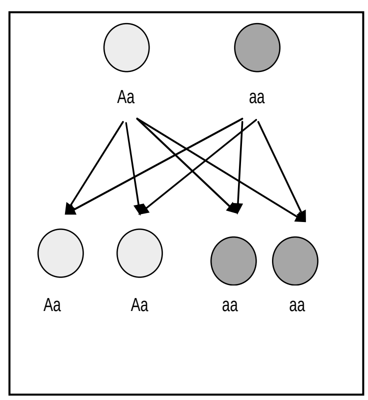
Resultado:

Fenotipo: 50 % semillas amarillas y 50% semillas verdes. La razón del fenotipo es: 2:2

Genotipo: 50% heterocigoto (Aa) y 50% homocigota recesivo.

Tablero de Punnett

	A	a
a	Aa	aa
a	Aa	aa



2. Se cruzan AA (Amarillo homocigota dominante) por Aa (amarillo heterocigota):

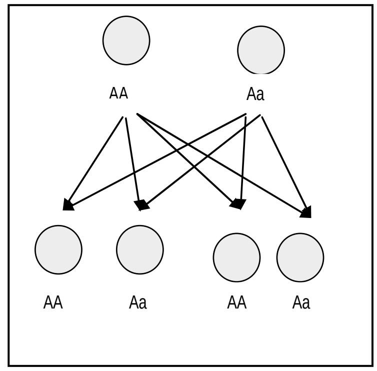
Resultado:

Fenotipo: 100% semillas amarillas. La razón del Fenotipo es: 1

Genotipo: 50% homocigota dominante (AA) y 50% heterocigoto (Aa)

Tablero de Punnett

	A	**A**
A	**AA**	**AA**
a	**Aa**	**Aa**



ANOMALÍAS CROMOSÓMICAS

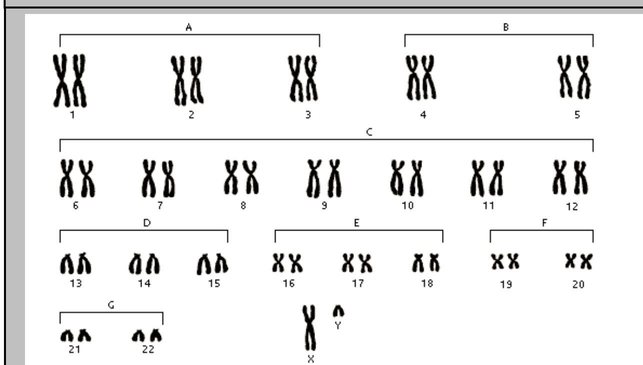
¿Por qué existen personas diferentes (especiales)?

Muchas veces estas diferencias se dan por enfermedades padecidas por los seres humanos de origen genético, es decir, ya nacen con la enfermedad. Algunas de las cuales son causas de un desorden en los cromosomas.

Veamos…

Cuando se realiza la unión de las células sexuales de los seres humanos (espermatozoide y óvulo) el huevo fecundado debe recibir 23 cromosomas del óvulo y 23 cromosomas del espermatozoide para completar 46. Sin embargo en los cromosomas y en los genes pueden ocurrir cambios. Estos cambios en el material hereditario recibe el nombre de “Mutación” o “Alteración cromosómica”.

Cariotipo Humano



De los 23 pares de cromosomas que posee el ser humano. El par Nº 23 corresponde al de los cromosomas sexuales: XX o XY dependiendo del género (varón p mujer) del individuo y los demás y los demás pares al de los cromosomas somáticos.

FOTO: ENCARTA, 2004

Las mutaciones pueden afectar a la estructura o al número normal de cromosomas.

Cuando aparece un cromosoma en uno de los pares cromosómicos recibe el nombre de “Trisomía” y cuando desaparece uno de los cromosomas recibe el nombre de “Monosomía”.

Algunas enfermedades producidas por alteraciones en los cromosomas son:

1. En los Autosomas: son los que afectan a los cromosomas somáticos, es decir, los 22 primeros pares. Entre estas alteraciones tenemos:

A) En cuanto al número de cromosomas:

- **Síndrome de Down o Trisomía del para 21:** tienen 47 cromosoma, esta enfermedad se caracteriza por la aparición de un cromosoma demás en el par cromosómico 21. los individuos con esta enfermedad se caracterizan por presentar la cara redonda, boca abierta, lengua grande y con estrías, estatura mediana, manos y pies gordos. La Probabilidad de tener un hijo con síndrome de Down es de 1 en 40.

- **Síndrome de Edwad o trisomía del par 18:** se caracteriza por la aparición de un cromosoma demás en el par 18. los individuos que poseen este síndrome presentan las siguientes características: Deficiencia del crecimiento, forma anormal del cráneo y características faciales, manos apretadas, pies inferiores del eje de balancín, anormalidades cardiacas y renales.

- **Síndrome de Patau o Trisomía del par 13:** tienen 47 cromosomas ya que se caracteriza por la aparición de un cromosomas demás en el par Nº 13. Los síntomas: retraso mental, labio leporino, ausencia de paladar y a veces de un ojo, aumento del tamaño del riñón. Los afectados mueren poco tiempo después de nacer, la mayoría a los 3 meses, como mucho llegan al año.

B) En cuanto a la estructura del cromosoma:

- **Síndrome de Criduchat o maullido de gato:** que se origina por una “delección” parcial del brazo corto del cromosoma Nº 5. Los síntomas son: llanto semejante al maullido del gato,…..

2. En los cromosomas sexuales:

- **Síndrome de Turner**: se caracteriza por la ausencia de uno de los cromosomas (monosomía) en uno de los cromosomas sexuales. Su constitución genética es XO. Afecta sólo a las mujeres. Los síntomas que presentan las mujeres con este síndrome son: baja estatura, cuello alado (con pliegues), poco desarrollo en los senos.

- **Síndrome de Klinelfelter**: se caracteriza por la presencia de un cromosoma demás en el par sexual (trisomía). Su composición genética es XXY. Este síndrome afecta sólo a los varones. Los síntomas que presentan los que padecen este síndrome son: pene y testículos pequeños, Vello púbico, axilar

SABÍAS QUE…

A los que padecen de Síndrome del Down se los suele asociar con los mongólicos por su semejanza a los habitantes de Mongolia.

ENTÉRATE QUE…

Las Aberraciones Cromosómicas no son hereditarias pero las mujeres mayos de 40 años corren mayor riesgo de tener hijos e hijas con síndromes que las mujeres más jóvenes.

PARA SABER MÁS…

En conjunto, las alteraciones cromosómicas afectan a 7 de cada 1.000 nacidos vivos y son responsables de cerca del 50% de los abortos espontáneos en los tres primeros meses de embarazo.

y facial escaso, problemas sexuales, agrandamiento de las mamas, estatura alta, proporciones corporales anormales (piernas largas, tronco corto)

- **Síndrome Triple X o XXX:** se caracteriza por la aparición de un cromosoma demás en el par sexual, su composición genética es XXX. Afecta sólo a las mujeres. Las mujeres con este síndrome son iguales a las normales sólo que poseen un coeficiente intelectual bajo.

Mutaciones genéticas

Estas mutaciones genéticas se transmiten de generación a generación no como las aberraciones cromosómicas. Algunas de estas mutaciones son:

a) La Hemofilia: es una enfermedad que se encuentra ligado al cromosoma X del par sexual. Se caracteriza por la incapacidad de la coagulación sanguínea. Las mujeres sólo pueden ser portadoras de la enfermedad mientras que los varones pueden ser enfermos.

Considerando que: "H" indica un cromosoma X sano y "h" un cromosoma "X" con la hemofilia. Entonces tendremos los siguientes datos:

X^HX^h = mujer portadora de la hemofilia

X^HY = hombre sano

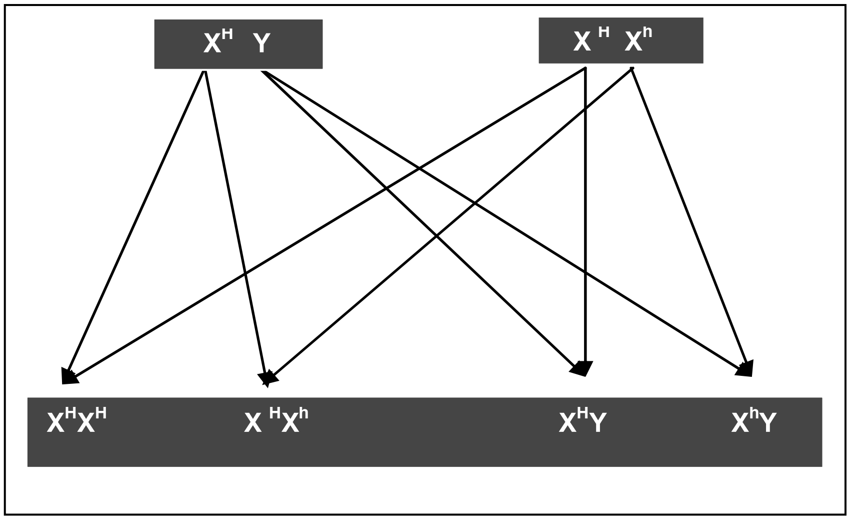
X^HX^H = mujer sana

X^hY = hombre hemofílico

X^hX^h = mujer, muere o no llega a nacer.

Aplicación de la Genética Mendeliana a la Hemofilia

Una mujer portadora de la Hemofilia se une con un hombre sano ¿Cuál es la probabilidad de poseer hijos con la enfermedad?



SABÍAS QUE…

Un 80% de los casos de hemofilia presentan antecedentes familiares; el 20% restante se debe a mutaciones genéticas espontáneas. La herencia es de tipo recesivo ligado al sexo por genes transmitidos por el cromosoma X materno.

Resultado

X^HX^H: 25**%** mujer sana

X^HY: 25**%** hombre sano

X^HX^h: 25**%** mujer portadora

X^hY: 25**%** hombre hemofílico

Aplicando el Tablero de Punnett

	X^H	Y
X^H	X^HX^H	X^HY
X^h	X^HX^h	X^hY

b) Daltonismo: es otra enfermedad ligada al sexo y se caracteriza por la incapacidad de percibir los colores.

c) El Albinismo: se debe a una mutación genética que resulta por la ausencia del pigmento llamado "melanina". Y como resultado la persona albina no presenta pigmentado los pelos, la piel y los ojos se presentan rosados o azules pálidos.

REALIZA LOS SIGUIENTES CRUCES

1. **Una mujer de visión normal se une con un daltónico. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga hijos e hijas sanas?**

Datos:

X^DX^d= mujer portadora de daltonismo

X^DX^D= mujer sana

X^dX^d= mujer daltónica

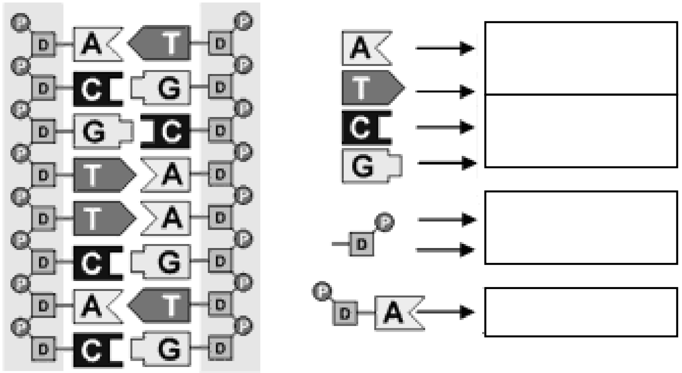
X^DY= hombre sano

X^dY= hombre daltónico

2. **En las plantas de guisantes, los tallos largos (B) dominan sobre los tallos cortos (b). Se cruzan dos guisantes uno de tallo largo (Heterocigoto -Bb-) y el otro de tallos corto (homocigoto -bb-). Determina la frecuencia fenotípica y genotípica (Fenotipo y Genotipo)**

3. **¿Cuál es la probabilidad de que tengan hijos sanos (sin los genes de la hemofilia) una pareja donde el hombre es hemofílico y la mujer es portadora?**

B) completa el gráfico de la estructura del ADN



1. Completen el siguiente cuadro con los diferentes síndromes que pueden padecer los seres humanos:

Anomalías cromosómicas			
Asociadas	**Síndromes**	**Deficiencia en el cromosoma**	**Características**
Autosoma			

Anomalías cromosómicas				
Asociadas	**Síndromes**	**Deficiencia en el cromosoma**	**Características**	**Afecta a:**
Cromosomas Sexuales				

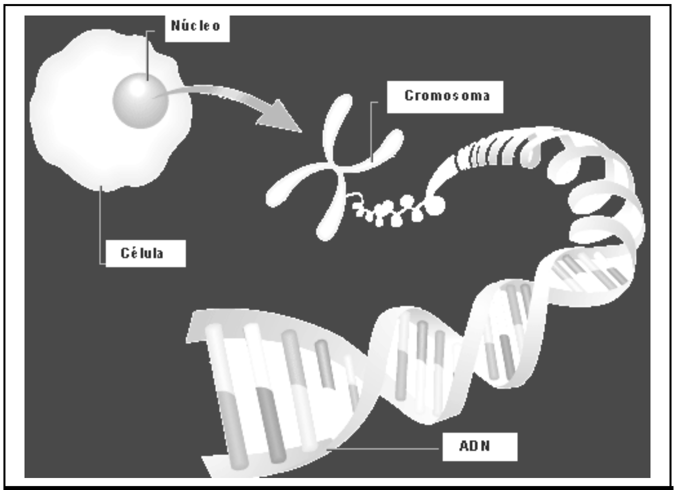
Supongamos que eres un consejero matrimonial

1. ¿Qué consejo le darías a una pareja que está esperando un hijo. Aunque aun no nació pues lleva seis meses de gestación y le han detectado el Síndrome de Down?

2. Si una mujer ya ha tenido un hijo con Síndrome de Klinelfelter pero desea tener otro hijo. ¿Cómo actuarías ante este hecho?

3. Una mujer y un varón desean tener hijos e hijas ¿Cuál es la probabilidad de que le salga hijo varón?

1. Escribe el mensaje transmitido a través de la siguiente imagen



ENCARTA, 2007

2. **Completa con "F" si las afirmaciones son falsa y con "V" si son verdaderas. Justifica las falsas.**

Nº	AIRMACIONES	F	V
1	Se llama cariotipo a la constitución cromosómica de los seres vivos. …………………………………………………………………………………………		
2	Gregor Mendel es considerado el diseñador de la molécula de ADN. …………………………………………………………………………………………		
3	El ADN es una porción del Gen. …………………………………………………………………………………………		
4	El síndrome de Turner sólo afecta a las mujeres. …………………………………………………………………………………………..		
5	Se llama "***monosomía***" a la pérdida de un cromosoma de cualquiera de los pares. …………………………………………………………………………………………..		
6	Se llama "Aberración Cromosómica" solo a la alteración del número normal de cromosoma. …………………………………………………………………………………………		

3. Elabora un mapa conceptual sobre las diferentes Mutaciones Genéticas.

Indica la respuesta que más se adecua a tu realidad.

Al finalizar esta unidad puedo afirmar que:

INDICADORES	SI	NO
Identifico las Leyes de Mendel.		
Soluciono problemas de cruzamientos.		
Determino la probabilidad resultante de los cruces.		
Identifico las anomalías cromosómicas.		
Describo las anomalías que presentan algunos seres humanos.		

LA GÉNETICA EN LA MATEMÁTICA

La genética, en término científico, es el estudio de herencia y sus variaciones. Cuando trabajamos en matemática con las ideas de números y de sistemas de numeración podemos decir quizás que su origen “su genética”, deriva de la representación e interpretación de los primitivos conocimientos matemáticos relacionados con el lenguaje gráfico que tiene la ventaja de ser por un lado, universal, y por el otro, que simplifica la información.

HACE TIEMPO, EN UNA CAVERNA…

…a los hombres primitivos se les planteó la necesidad de llevar un registro numérico de los distintos objetos que poseían. ¿Cómo hacerlo?, se preguntaron .Comenzaron entonces, a pintar en las paredes de las cavernas que habitaban o en bloques de piedra, una rayita por cada animal que tenían.

Aunque nosotros sepamos poco de los conocimientos matemáticos que dominaron estos pueblos o del lenguaje que empleaban para comunicarse, esos registros gráficos, por ser tan sencillos y universales, nos permiten conocer sus costumbres.

Lo cierto es que partir de esas primitivas anotaciones que el hombre realizó la mejor herencia que recibimos es la relación entre valores y registros numéricos. Una de las ventajas del lenguaje gráfico, por sobre los otros, es que nos permite visualizar la información en forma clara, breve y sencilla.

Ahora te propongo hacer un recorrido por las distintas representaciones gráficas de que las que las matemáticas se valen en la actualidad para representar informaciones, noticias, datos como matrices, representaciones graficas de lugares geométricos, etc.

En esta unidad vamos a hacer un recorrido por los conceptos fundamentales del trabajo con matrices y determinantes de cara a fundamentar el empleo de las mismas en diversas situaciones.

Las matrices aparecen por primera vez hacia el año 1850, introducidas por J.J. Silvestre.

El desarrollo inicial de la teoría se debe al matemático W.R. Hamilton en 1853.

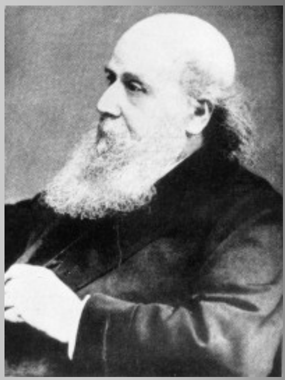
En 1858, A. Cayley introduce la notación matricial como una forma abreviada de escribir un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas.

Las matrices se utilizan en el cálculo numérico, en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, de las ecuaciones diferenciales y de las derivadas parciales. Además de su utilidad para el estudio de sistemas de ecuaciones lineales, las matrices aparecen de forma natural en geometría, estadística, economía, informática, física, etc.

La utilización de matrices constituye actualmente una parte esencial en los lenguajes de programación, ya que la mayoría de los datos se introducen en los ordenadores como tablas organizadas en filas y columnas: hojas de cálculo, bases de datos, etc.

Aquí trataremos de que comprendas la utilidad de las matrices como recurso para representar, de forma económica, los datos esenciales de algunos problemas. Además, en el caso de sistemas de ecuaciones lineales la aplicación de las leyes del cálculo matricial y de los determinantes permite discutir previamente la existencia de la solución del problema así como formular métodos generales de resolución.

MATEMÁTICOS CÉLEBRES



James Joseph Sylvester
(1814 - 1897)

Matemático inglés. Su estrecha relación con Cayley cristalizó en la creación de la teoría de invariantes algebraicos y de las matrices.

William Rowan Hamilton
(1805-1865)

Fue un matemático, físico, y astrónomo irlandés, que hizo importantes contribuciones al desarrollo de la óptica, la dinámica, y el álgebra.

Fuente: Wikipedia, la enciclopedia libre

MATRICES

Cuántas noticias!!! .Observa cada uno de estos cuadros, contienen informaciones muy útiles que a diario se presenta en los medios de comunicación y en ocasiones resultan imprescindibles a la hora de planificar alguna actividad o tomar decisiones. ¿Podrías describir alguna particularidad en su forma de presentación?

Martes	Caluroso, viento variable.
Max.	37°C
Min.	24°C
Miércoles	
Max.	37°C
Min.	24°C
Jueves	
Max.	36°C
Min.	25°C
Viernes	
Max.	29°C
Min.	21°C
Sábado	
Max.	30°C
Min.	20°C

Aquí se observa las probables características del tiempo y las temperaturas máximas y mínimas previstas para la ciudad de Asunción, desde el día martes 08 al día sábado 12 de enero del 2008

MONEDA	COMPRA	VENTA
DOLAR	4.600	4.700
EURO	6.650	6.900
PESO ARG.	1.350	1.450
REAL	2.450	2.550
PESO URU.	220	270
YEN	39	43

Cotizaciones de monedas en el mercado local (Asunción 08/01/08)

Este cuadro representa las posiciones de los equipos paraguayos en el Torneo Clausura en el año 2007

Nº	Equipo	Pts	PJ	PG	PE	PP	GF	GC
1	Libertad	30	12	9	3	0	20	9
2	Cerro Porteño	26	12	8	2	2	25	10
3	Olimpia	22	12	6	4	2	14	9
4	Sol de América	17	12	4	5	3	16	15
5	Nacional FC	16	12	4	4	4	19	16
6	Tacuary FBC	15	12	4	3	5	15	17
7	Guaraní	14	12	4	2	6	12	13
8	12 de Octubre	14	12	4	2	6	11	12
9	Sportivo Trinidense	14	12	3	5	4	7	9
10	3 de Febrero	12	12	3	3	6	13	24
11	2 de Mayo PJC	9	12	2	3	7	9	18
12	Sportivo Luqueño	8	12	2	2	8	10	19

Como habrás notado todas estas informaciones se expresan mediante cuadros de números en filas y columnas denominados matrices.

Podríamos decir entonces, que una matriz es una tabla con columnas y filas, donde uno ubica ciertos elementos. Por ejemplo, la platea de un cine consiste de un número determinado de filas y columnas con asientos que serán ocupados por el público. La grilla de televisión que aparece en todos los diarios es otro ejemplo, las columnas indican los horarios, y las filas, los distintos canales. O podría ser al revés, dependiendo del número de canales, claro está.

Para comprenderlo mejor, analiza el siguiente ejemplo:

En el primer trimestre del año 2007 las marcas de motocicletas más vendidas en Paraguay se encuentran representadas en el siguiente cuadro.

	Enero	**Febrero**	**Marzo**
Leopard	20	18	25
Star	12	10	15
Kenton	15	9	20
Génesis	18	15	21

Si se quiere saber la cantidad de motocicletas Kenton vendidas en enero, se debe buscar el número que está en la tercera fila y en la primera columna de la tabla. Los números dispuestos horizontalmente de denominan filas y a los dispuestos verticalmente se denominan columnas.

En importante conocer que aproximadamente un 85 % estas motocicletas son ensambladas en nuestro país, dando trabajo a muchos paraguayos.

Es importante tener en cuenta algunas precauciones a la hora de viajar en motocicleta, tales como:

- Acudir primeramente a una escuela de conducción y aprenderse las reglas de transito.
- Llevar indefectiblemente el casco protector todas las veces. Si va acompañado, el acompañante tendrá que colocarse también.
- No llevar en lo posible niños.

En otras palabras, una disposición rectangular de “n” filas (horizontales) y “m” columnas (verticales), con n x m elementos de un conjunto, es lo que se denomina matriz de orden n por m. Cada elemento de la matriz se llama entrada y usualmente se denota con una letra y un par de subíndices que indican la fila (i) y la columna (j) donde está ubicado. Por ejemplo, a_{23} está en el cruce de la segunda fila con la tercera columna. Dos matrices del mismo orden son iguales si sus respectivas entradas son iguales.

Los elementos de una matriz pueden ser, en general, objetos matemáticos de muy variados tipos.

Ejemplos

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$ Es una matriz de 3 x 2, porque consta de tres filas y dos columnas.

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$ Es una matriz de 2 x 3, porque consta de dos filas y tres columnas.

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$ Es una matriz de 3 x 3, porque consta de tres filas y tres columnas.

Si m = n, la matriz se denomina cuadrada y el número de filas o columnas es el orden de la matriz

Generalizando una matriz A de orden n x m puede representarse así:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$\text{O bien}: A = (a_{ij})$ donde $i = 1,2\ldots n$ y $j = 1,2,\ldots m$

o sencillamente: A_{nxm}

Una matriz consta de una diagonal principal y otra secundaria

Diagonal principal de una matriz cuadrada está formada por los elementos a_{11}, a_{22},…, es decir, por los elementos en los que coincide el Nº de fila con el de columna.

Diagonal secundaria de una matriz cuadrada está formada por los elementos a_{12}, …a_{21}, es decir por los elementos en los que la suma de los subíndices del Nº de fila con el de columna, es igual a una unidad más que el orden de la matriz.

Clases de matrices

De acuerdo con las características de sus elementos, el número de filas y columnas que posee, las matrices pueden clasificarse según se presenta en el siguiente cuadro.

Denominación	Descripción	Ejemplo
Matriz fila	Matriz que tiene una sola fila, siendo s orden **n x 1.**	A = (1 5 -1)
Matriz columna	Matriz que tiene una sola columna, siendo su orden **1 x m**.	$B=\begin{pmatrix}1\\5\\-1\end{pmatrix}$
Matriz nula	Matriz con todas las entradas nulas.	$C=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
Matriz opuesta	La matriz opuesta de **A**, es la matriz que se obtiene al sustituir cada elemento de A por su opuesto. Esta matriz se denota por **– A.**	$A=\begin{pmatrix}2&-5\\-6&7\end{pmatrix}\Rightarrow -A=\begin{pmatrix}-2&5\\6&-7\end{pmatrix}$
Matriz transpuesta	La transpuesta de una matriz **A** consiste en intercambiar las filas por las columnas y se denota por A^t	$A=\begin{pmatrix}1&2\\-3&5\\\sqrt{2}&0\end{pmatrix}\Rightarrow A^t=\begin{pmatrix}1&-3&\sqrt{2}\\2&5&0\end{pmatrix}$
Matriz cuadrada	Es una matriz que tiene el mismo número de filas que de columnas, es decir, **m = n**. Se denomina simplemente matriz de orden **n.**	$A=\begin{pmatrix}3&4\\-1&0\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$
Matriz identidad	Es una matriz cuadrada donde todos sus elementos son nulos, salvo los de la diagonal principal que son iguales a uno. La matriz identidad de cualquier orden se denota por **I.**	$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$
Matriz Simétrica	Es una matriz cuadrada igual a su transpuesta, es decir, $A=A^t$	$A=\begin{pmatrix}3&-8&7\\-8&4&3\\7&3&5\end{pmatrix}\Rightarrow A^t=\begin{pmatrix}3&-8&7\\-8&4&3\\7&3&5\end{pmatrix}$
Matriz asimétrica	Es una matriz cuadrada igual a la opuesta de su transpuesta. Es decir, $A=-A^t$	Si $A=\begin{pmatrix}1&-3\\5&2\end{pmatrix}\rightarrow A^t=\begin{pmatrix}1&5\\-3&2\end{pmatrix}\rightarrow -A=\begin{pmatrix}-1&-5\\3&-2\end{pmatrix}$
Matriz diagonal	Una matriz cuadrada es diagonal cuando tiene nulos todos los elementos que no pertenecen a la diagonal principal.	$A=\begin{pmatrix}3&0\\0&5\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&5&0\\0&0&1\end{pmatrix}$
Matriz triangular superior	Es una matriz cuadrada que tiene ceros en todos los elementos que están por debajo de la diagonal principal.	$A=\begin{pmatrix}2&3&4\\0&1&3\\0&0&4\end{pmatrix}$
Matriz triangular inferior	Es una matriz cuadrada que tiene ceros en todos los elementos que están por arriba de la diagonal principal.	$A=\begin{pmatrix}3&0&0\\2&1&0\\7&2&4\end{pmatrix}$

Ahora que has estudiado a las matrices, conocido sus características y su representación, resuelve estas propuestas.

1. Escriba una matriz de cada uno de los siguientes tipos:

a) triangular.   b) diagonal.   c) cuadrada y su transpuesta.

2. Observa las matrices dadas, clasifícalas según el cuadro anterior y determina el orden de cada una de ellas.

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 2) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & -7 \\ 7 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ 3) $C = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

4) $D = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ 5) $E = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

3. Analiza las matrices dadas y halla las transpuestas:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 4 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Igualdad de matrices

Si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son matrices del mismo orden y cada elemento de A es igual al elemento correspondiente (elemento que ocupa la misma posición) de B, se dice que las matrices son iguales.

Ejemplo:

Observa estas matrices del mismo orden (2 x 2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3-2 & 5-3 \\ 2+1 & 4:2 \end{pmatrix}$$

Donde todos los elementos correspondientes son iguales

$a_{11} = 1$ y $b_{11} = 3 - 2 \Rightarrow a_{11} = b_{11}$
$a_{21} = 3$ y $b_{21} = 2 + 1 \Rightarrow a_{21} = b_{21}$
$a_{12} = 2$ y $b_{12} = 5 - 3 \Rightarrow a_{12} = b_{12}$
$a_{22} = 4$ y $b_{22} = 4 : 2 \Rightarrow a_{22} = b_{22}$

Por lo tanto A = B

De acuerdo a lo que has visto te mostraremos como hallar valores a través de la igualdad de matrices

a) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 - 1 & 2^2 \\ 4 \text{ x } 3 & -3 \end{pmatrix}$ donde A = B

Calculamos los elementos desconocidos

Como A = B, se puede afirmar que:

$a = 3 - 1 = 2$
$b = 2^2 = 4$
$c = 4 \text{ x } 3 = 12$
$d = -3$

ES BUENO SABER QUE…

Las matrices se utilizan en el cálculo numérico, en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, de las ecuaciones diferenciales y de las derivadas parciales. Tienen también muchas aplicaciones en el campo de la física

a) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 - 1 & 2^2 \\ 4 \text{ x } 3 & -3 \end{pmatrix}$ donde A = B

Calculamos los elementos desconocidos

Como A = B, se puede afirmar que:

$a = 3 - 1 = 2$
$b = 2^2 = 4$
$c = 4 \text{ x } 3 = 12$
$d = -3$

b) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} x + y & 5 \\ 3x - y & 1 \end{pmatrix}$ donde A = B, calculamos el valor de **x** e **y**

Igualando los elementos de ambas matrices tendremos un sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x - y = 10 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones, eliminando “y” de las dos ecuaciones considerando que son términos semejantes de signos contrarios.

$$\begin{array}{r} x + y = 2 \\ 3x - y = 10 \\ \hline 4x = 12 \end{array}$$

Despejamos **x** para hallar su valor

$$x = \frac{12}{4}$$

$$x = 3$$

Reemplazamos el valor de x en la primera ecuación

$$x + y = 2$$

$$3 + y = 2$$

Pasamos el término independiente “3” del primer miembro al segundo miembro, con signo cambiado y obtenemos el valor de “y”.

$$y = 2 - 3$$

$$y = -1$$

Luego x = 3 e y = -1, verificamos que:

$$B = \begin{pmatrix} x + y & 5 \\ 3x - y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + (-1) & 5 \\ 3.3 - (-1) & 1 \end{pmatrix} \rightarrow B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, A = B

Es el momento en que pongas a prueba los conocimientos que has adquirido. Demuéstralo, ¡¡¡tú puedes!!!

a) Calcula el valor de x e y sabiendo que $\begin{pmatrix} 2x + 3y \\ 3x - \ \ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 16 \end{pmatrix}$

b) Determina el valor de a, b, x, y, sabiendo que $\begin{pmatrix} x+y & 2a+b \\ 2x-y & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

c) Encuentra el valor de los elementos desconocidos, sabiendo que las matrices son iguales: $\begin{pmatrix} x-3y \\ 2x-3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$

¡Te gustaría saber que operaciones matemáticas se puede realizar con matrices

Ahora que ya conoces el concepto de matriz y las diferentes clases de matrices, te mostraremos qué operaciones matemáticas puedes realizar con ellas.

A- Adición

Lee y analiza la situación planteada.

Una fábrica de remeras deportivas tiene dos plantas P_1 y P_2. En P_1 se confeccionan remeras para niños y en P_2 remeras para adultos. Determina los precios de venta de cada remera

La industria textil es una de las más florecientes en los últimos años. Se ha posicionado en el mercado nacional logrando calidad en sus productos.

Los costos de producción y venta de cada remera se muestran en el siguiente cuadro:

	Costos de producción de cada remera en G			
	Niños	Niñas	Mujeres	Hombres
P_1	20 000	22 000	0	0
P_2	0	0	33 000	35 000

Las ganancias obtenidas por la venta de las remeras son:

	Ganancia por cada remera en G.			
	Niños	Niñas	Mujeres	Hombres
P_1	30 000	13 000	0	0
P_2	0	0	12 000	15 000

Con esos datos es posible considerar dos matrices: C de costos y de ganancias:

$$C = \begin{pmatrix} 20000 & 22000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 33000 & 35000 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 10000 & 13000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12000 & 15000 \end{pmatrix}$$

Para determinar el **precio de venta** de cada remera, podrás considerar una matriz V donde en cada uno de sus entradas o elementos se coloque la suma de los costos de producción y las ganancias. Así tendrás:

$$V = \begin{pmatrix} 20000+10000 & 22000+13000 & 0+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+0 & 33000+12000 & 35000+15000 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} 60000 & 35000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 45000 & 50000 \end{pmatrix}$$

Así la matriz V corresponde matemáticamente a la suma de las matrices C y G. Es decir, V = C + G. Por lo tanto, el precio de venta de cada prenda está representada en la matriz V.

IMPORTANTE

Solo puedes sumar y restar algebraicamente matrices del mismo orden. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Puede resolverse considerando que son matrices del mismo orden , 2 x 3

Para sumar matrices, sumamos cada elemento de la primera matriz con el elemento que ocupa la misma posición en la segunda matriz.

B-Sustracción

Teniendo en cuenta la situación anterior y considerando que en la época de liquidación de fin de temporada las prendas han sido ofertadas en ₲ 3000 y ₲ 3500 menos que el costo de venta normal para las prendas para niños y niñas; y ₲ 4500 y 5000 para mujeres y varones, ¿cuál será la matriz que represente el precio de venta obtenida en ese periodo?

V = precio de venta

R = rebajas por prendas

L = precio de venta en periodo de liquidación

$$V = \begin{pmatrix} 60000 & 35000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 45000 & 50000 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 3000 & 3500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4500 & 5000 \end{pmatrix}$$

La venta en el periodo de liquidación quedará representada por la siguiente matriz

$$L = \begin{pmatrix} 60000-3000 & 35000-3500 & 0-0 & 0-0 \\ 0-0 & 0-0 & 45000-4500 & 50000-5000 \end{pmatrix}$$

Resolviendo la sustracción se obtiene la matriz que representa el precio de venta en el periodo de liquidación.

$$L = \begin{pmatrix} 57000 & 31500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 45000 & 45000 \end{pmatrix}$$

***Para restar matrices, restamos cada elemento de la primera matriz con el elemento que ocupa la misma posición en la segunda matriz*.**

Te propongo poner a prueba tus aprendizajes resolviendo con tus compañeros estas situaciones mediante el cálculo con matrices.

1) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$

Calcula a) A + B b) A – B c) A – C d) A + C e) B - C

2) Un importador de globos los importa de dos colores, naranja (N) y fresa (F). Todos ellos se envasan en paquetes de 2, 5 y 10 unidades, que se venden al precio (en dólares) indicado por la tabla siguiente:

SABIAS QUE...

Las operaciones de adición y multiplicación tienen propiedades similares a las operaciones de adición y multiplicación de los números enteros: asociatividad de la adición y de la multiplicación; conmutatividad de la adición; existencia de elemento neutro para ambas operaciones; existencia de opuesto y distributividad de la multiplicación respecto a la adición. La diferencia está en que la multiplicación de matrices no es conmutativa.

La matriz nula $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Es el elemento neutro para la adición.

La matriz –A de una matriz A es el elemento opuesto a la adición.

La matriz identidad

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **Es el elemento neutro para la multiplicación.**

	2 unid.	5 unid.	10 unid.
Color N	0,04	0,08	0,12
Color F	0,03	0,05	0,08

Sabiendo que en un año se venden el siguiente número de paquetes:

	Color N	Color F
2 unid.	700000	50000
5 unid.	600000	40000
10 unid.	500000	500000

Resumir la información anterior en 2 matrices A y B, de tamaño respectivo 2x3 y 3x2 que recojan las ventas en un año (A) y los precios (B).

3) Un representante de telefonía móvil ha vendido en los tres primeros meses del año 2007 cierta cantidad de aparatos telefónicos, de dos modelos diferentes de tres grandes marcas, como se muestra en el siguiente cuadro:

M eses / Marcas	Enero		Febrero		Marzo	
	M1	M2	M1	M2	M1	M2
Nokia	64	36	80	40	82	58
Motorola	45	35	35	40	20	40
Sony	48	12	32	18	15	20

a) Expresa mediante matrices las ventas de cada uno de los meses.

b) Determina la compra total de aparatos telefónicos en el primer trimestre del año.

c) Considerando que en el mes de abril la empresa vendió una cantidad igual a la diferencia entre lo vendido en enero y febrero y lo vendido en marzo, ¿cuál sería la matriz que represente las ventas del mes de abril?

C-Multiplicación de un número real por una matriz

Ahora que ya aprendiste a sumar y restar matrices te proponemos estudiar la multiplicación de matrices.

Para comprender mejor como se resuelve la multiplicación de una matriz por un número real te proponemos a que analices la situación dada y a partir de ella saques tus propias conclusiones.

José es un joven trabajador, estudiante de la modalidad de Educación Media Abierta. Consciente de que debe poner todo su empeño y dedicación para poder terminar el bachillerato, decide dedicar más tiempo de estudio, en ciertos días de la semana a las áreas de ciencias básicas y matemáticas, como se ve en el siguiente cuadro:

Días	Ciencias Básicas	Matemática
Lunes	1 hora	2 horas
Martes	1 hora	1 hora
Miércoles	2 horas	1 hora

a) ¿Cuál es la matriz que representa su plan de estudios actual?

b) Si en época de examen decidiera duplicar sus horas de estudios ¿cuál sería la matriz que represente su nuevo plan de estudios?

Observa que el dato significativo aquí es plan de estudio actual, que representamos en la matriz P

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ciencias Básicas. Matemáticas

Para expresar su horario disponible previsto para la época de los exámenes construiremos la matriz E, para lo cual duplicamos las horas de estudios de la siguiente manera:

$$E = 2.P = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1\times 2 & 2\times 2 \\ 1\times 2 & 1\times 2 \\ 2\times 2 & 1\times 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \text{Lunes} \\ \text{Miércoles} \\ \text{Viernes} \end{array} \\ \begin{array}{cc} \text{Ciencias} & \text{Matemática} \end{array} & \end{array}$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{matriz que representa el horario de José en época de exámenes}$$

De acuerdo a lo realizado se puede decir que:

Dada una matriz cualquiera A y un número real k, el producto k.·A se obtiene multiplicando todos los elementos de A por k, resultando otra matriz de igual orden.

Ejemplos

Resolvemos estos ejemplos a fin de que vayas fijando bien

1) Si K = 3 y $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Entonces $3.A = \begin{pmatrix} -1.3 & 2.3 \\ 3.3 & 1.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$

2) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}0 & 4 & -2\\ 6 & 2 & 8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & 6 & 9\\ 12 & -6 & 0\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$

Calcula el resultado de las siguientes operaciones:

a) $2A-B+3C$

b) $\frac{1}{2}A-\left(\frac{1}{3}B+C\right)$

Resolvemos el ejercicio “a”, para ello:

- Primero: hallamos el producto de 2A

$$2A=\begin{pmatrix}0 & 8 & -4\\ 12 & 4 & 16\end{pmatrix}$$

- Segundo: hallamos el producto de 3C

$$3\,C=\begin{pmatrix}0 & -3 & 0\\ 3 & -3 & 6\end{pmatrix}$$

- Luego, resolvemos la sustracción de 2A – B

$$2A-B=\begin{pmatrix}0 & 8 & -4\\ 12 & 4 & 16\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3 & 6 & 9\\ 12 & -6 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2 & -13\\ 0 & 10 & 16\end{pmatrix}$$

- Por último hallamos la suma entre 2A – B y 3C.

$$2A-B+3C=\begin{pmatrix}3 & 2 & -13\\ 0 & 10 & 16\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -3 & 0\\ 3 & -3 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1 & -13\\ 3 & 7 & 22\end{pmatrix}$$

Por tanto, $2A-B+3C=\begin{pmatrix}3 & -1 & -13\\ 3 & 7 & 22\end{pmatrix}$

b) $\frac{1}{2}A-\left(\frac{1}{3}B+C\right)=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ 3 & 1 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ 5 & -3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -4\\ -2 & 4 & 2\end{pmatrix}$

3) Sabiendo que $A=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$,

obtener las matrices C y D tales que: $\begin{cases}2C+D=A-B\\ C+3D=2A+B\end{cases}$

Resolvemos el sistema de ecuaciones multiplicando la segunda ecuación por (-2) para hallar D

$$\begin{array}{rcl} 2C + D &=& A - B \\ -2C - 6D &=& -4A - 2B \\ \hline -5D &=& -3A - 3B \end{array}$$

Despejamos D, transponiendo los términos, es decir, llevando el 5 del primer miembro al segundo miembro, con la operación contraria. Así tenemos:

$D = \dfrac{3\left(A + B\right)}{5}$ realizamos la suma de los elementos de A con los elementos de B.

$D = \dfrac{3\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}{5}$ resolvemos la multiplicación indicada y obtenemos $D = \begin{pmatrix} 3 & \dfrac{6}{5} \\ 0 & \dfrac{6}{5} \end{pmatrix}$

Luego multiplicamos la primera ecuación por (-3) para hallar C y seguimos el mismo proceso para hallar D.

EXPLORA tus conocimientos y resuelva los siguientes ejercicios.

1) Teniendo la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 10 & -8 \\ 20 & 6 & -6 \\ -2 & 0 & 20 \end{pmatrix}$, calcula $-\frac{1}{2}A$

2) Resuelva el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y = A + B \\ X - Y = A - B \end{cases}$, siendo A = $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

3) Cecilia, una joven que para solventar parte de sus estudios se dedica a la fabricación de bijutería fina, produce semanalmente estos artículos que se representan en la matriz B

$$B = \begin{array}{cccc} \text{Aros} & \text{Pulseras} & \text{Collares} & \\ \left(\begin{array}{c} 100 \\ 95 \end{array}\right. & \begin{array}{c} 85 \\ 75 \end{array} & \left.\begin{array}{c} 70 \\ 60 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \text{Modelo 1} \\ \text{Modelo 2} \end{array} \end{array}$$

Calcula la producción de Cecilia, sabiendo que para la siguiente semana deberá triplicarlo atendiendo a un pedido que tiene de una casa dedicada a la venta del ramo y represéntalo en una matriz.

4) Un establecimiento que vende productos de belleza, ha decidido hacer un descuento del 10% en los precios de tres marcas de tintes para el cabello. Si los precios actuales están señalados en el siguiente cuadro, calcula el descuento de cada tinte y represéntalo en una matriz:

Marcas de tinte	**A**	**B**	**C**
Precio por unidad en ₡.	8000	17000	ç24000

¿Cómo se resuelve el Producto de dos matrices?

En el apartado anterior has aprendido a resolver el producto de una matriz por un número real, aquí te mostraremos como se resuelve el producto de dos matrices, para ello analicemos esta situación.

Una fábrica de helados, de mucha aceptación, se especializa exclusivamente en dos sabores, para lo cual utilizan cierta cantidad de ingredientes especiales, x, y, z, de acuerdo a la tabla indicada abajo. Se fabrican 70 kg de helados del sabor 1 y 60 kg de helados del sabor 2 por día. Se requiere determinar la cantidad de ingredientes utilizados por día para la fabricación de los helados.

Ingredientes	**Helados**	
	Sabor 1	**Sabor 2**
x	4	4
y	3	6
z	5	2

TEN EN CUENTA QUE...

"Para multiplicar dos matrices A y B, en este orden, A·B, es condición indispensable que el número de columnas de A sea igual al número filas de B"

Si no se cumple esta condición, el producto A·B no puede realizarse, de modo que esta es una condición que debemos comprobar previamente a la propia multiplicación.

Representamos la tabla en la matriz A: $A=\begin{pmatrix}4 & 4\\ 3 & 6\\ 5 & 2\end{pmatrix}$ y la cantidad de kilogramos de helados por día en la matriz B: $B=\begin{pmatrix}70\\ 60\end{pmatrix}$

Para determinar la cantidad de ingredientes utilizados por día se procede así:

Ingrediente x	4.70 + 4.60 = 520
Ingrediente y	3.70 + 6.60 = 570
Ingrediente z	5.70 + 2.60 = 470

Se representa estas cantidades en otra matriz: $C=\begin{pmatrix}520\\ 570\\ 470\end{pmatrix}$

Esta misma matriz podemos obtener a través del denominado matriz producto A.B,

donde cada elemento de la matriz $C=\begin{pmatrix}520\\ 570\\ 470\end{pmatrix}$ resulta de la suma de los productos ordenados de los elementos de una fila de la matriz $A=\begin{pmatrix}4 & 4\\ 3 & 6\\ 5 & 2\end{pmatrix}$ por los elementos de la matriz $B=\begin{pmatrix}70\\ 60\end{pmatrix}$, es decir: $A.B=C \Rightarrow \begin{pmatrix}4 & 4\\ 3 & 6\\ 5 & 2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}70\\ 60\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}520\\ 570\\ 470\end{pmatrix}$

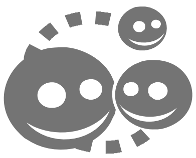
A. B =	4.70 + 4.60 = 520 3.70 + 6.60 = 570 5.70 + 2.60 = 470	$C=\begin{pmatrix}520\\ 570\\ 470\end{pmatrix}$

,

Atendiendo a todo lo expuesto hasta ahora se define entonces el producto de matrices.

Dadas dos matrices $A = (a_{ij})$ de orden m x n y $B = (b_{ij})$ de orden p x q donde m = q, es decir, el número de columnas de la primera matriz *A* es igual al número de filas de la matriz *B*, se define el producto A·B de la siguiente forma :(no entiendo el concepto)

El elemento **a** que ocupa el lugar (i, j) en la matriz producto se obtiene sumando los productos de cada elemento de la fila i de la matriz A por el correspondiente de la columna j de la matriz B.



A trabajar nuevamente!!!, para ello pongas toda tu atención y tus conocimientos para resolverlos correctamente.

1. Resuelva cada uno de los siguientes productos indicados.

a) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$

b) $\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$

c) $3 \cdot \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$

d) $2 \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} =$

2. Analiza cada una de las situaciones problemáticas, elabora un plan de solución y resuelve. Compara los resultados con tus compañeros.

a. Una empresa produce tres bienes *A, B,* y *C*. Tiene tres almacenes y, cada una de ellas, produce los tres bienes en las cantidades por hora siguientes:

	ALMACEN 1	ALMACEN 2	ALMACEN 3
A	10 unid/hora	20 unid/hora	15 unid/hora
B	25 unid/hora	25 unid/hora	20 unid/hora
C	30 unid/hora	25 unid/hora	25 unid/hora

En el almacén 1 se trabajan 8 horas diarias, el almacén 2 funciona las 24 horas del día y en el almacén 3 se trabajan 10 horas diarias.

- Calcula matricialmente el número de unidades diarias de los bienes *A, B* y *C* que fabrica la empresa.

- Si se trabaja durante 22 días cada mes, obtén matricialmente la proporción mensual de la empresa en cada uno de los bienes A, B y C.

b. En la sala de un hospital dedicado al tratamiento de diabéticos se administra insulina de tres clases: semilenta, lenta y ultralenta. El número de unidades diarias que se aplica a los pacientes de los cinco ingresados viene dado por la siguiente tabla:

	Pac. 1	Pac. 2	Pac. 3	Pac. 4	Pac. 5
Semilenta	15	15	20	30	10
Lenta	20	20	15	5	20
Ultralenta	10	5	10	10	15

El número de días que ha estado internado cada paciente es:

	Pac. 1	Pac. 2	Pac. 3	Pac. 4	Pac. 5
Nº de días	3	7	5	12	20

Calcula, con ayuda del producto de matrices, las unidades de cada clase que le fue administrada a los pacientes.

c. En un hospital oncológico se aplica a un grupo de cuatro pacientes un tratamiento de quimioterapia mediante un protocolo CMF (C=ciclofosfamida, M=metrotexate, F=5-

fluoracilo). Las cantidades diarias que necesita cada paciente de cada uno de los compuestos varían según la superficie total corporal, del siguiente modo:

Paciente 1	1200 mg de C, 80 mg de M y 1200 mg de F.
Paciente 2	900 mg de C, 60 mg de M y 950 mg de F.
Paciente 3	1100 mg de C, 70 mg de M y 1000 mg de F.
Paciente 4	1150 mg de C, 80 mg de M y 1100 mg de F.

Teniendo en cuenta que el tratamiento se va a aplicar durante tres semanas a los pacientes 1, 3 y 4 y dos semanas al paciente 2, hallar la matriz de necesidades diarias y las cantidades de cada compuesto necesarias para poder atender correctamente los tratamientos de los cuatro pacientes.

RECUERDA QUE…

Que en matemáticas, un sistema de ecuaciones es un conjunto de dos o más ecuaciones con varias incógnitas.

Una solución para el sistema debe proporcionar un valor para cada incógnita, de manera que en ninguna de las ecuaciones del sistema se llegue a una contradicción. En otras palabras el valor que reemplazamos en las incógnitas debe hacer cumplir la igualdad del sistema.

Sigamos con expresión matricial de un sistema de ecuaciones lineales

Cualquier **sistema de ecuaciones lineales** puede escribirse siempre en forma matricial de la siguiente forma: A. X = B donde A es la **matriz de los coeficientes**, X la **matriz de las incógnitas** y B **la matriz de los términos independientes**.

Así, por ejemplo, el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcl} 3x + 2y - z &=& 4 \\ 5x + y - 3z &=& -6 \\ x \quad\quad + 7z &=& 1 \end{array}\right\} \text{ se expresa matricialmente como } \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donde $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ es la matriz correspondiente a los coeficientes, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ es la matriz correspondiente a las incógnitas y $\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$ es la matriz de los términos independientes.

Técnicas para obtener el inverso de una matriz (Matrices invertibles)

Existen muchas técnicas para obtener el inverso de una matriz, pero una de las más sencillas es utilizando la matriz identidad.

Se dice que una matriz cuadrada A **es invertible**, si existe una matriz B con la propiedad de que AB = BA = **I**, siendo **I** la matriz identidad. Denominamos a la matriz B la inversa de A y la denotamos por A^{-1}.

Demostración: Suponte $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

Entonces $A.B=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2.3+5.(-1) & 2.(-5)+5.2\\ 1.3+3.(-1) & 1.(-5)+3.2\end{pmatrix}=$

$$\begin{pmatrix}6-5 & -10+10\\ 3-3 & -5+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I$$

$$B.A=\begin{pmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}=$$

$$B.A=\begin{pmatrix}6-5 & 15-15\\ -2+2 & -5+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I$$

Puesto que AB = BA = I, entonces A y B son invertibles, siendo cada una la inversa de la otra.

Con este ejemplo se halla la inversa de una matriz:

Encontrar la inversa de A o A^{-1}.

Sea: $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 5\end{pmatrix}$, y que su inversa sea $A^{-1}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$

Si aplica la definición de inversa encontramos que $A.A^{-1}=I$, entonces:

$$\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 5\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Se resuelve:

$$\begin{pmatrix}2a+4c & 2b+4d\\ a+5c & b+5d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Por igualdad de matrices se obtiene sistemas de ecuaciones:

$$(1)\begin{cases}2a+4c=1\\ a+5c=0\end{cases}\qquad (2)\begin{cases}2b+4d=0\\ b+5d=1\end{cases}$$

Matemáticos Celebres

Johann Carl Friedrich Gauss (1777 –1855), matemático, astrónomo y físico alemán que contribuyó significativamente en muchos campos, incluida la teoría de números, el análisis matemático, la geometría diferencial, la geodesia, el magnetismo y la óptica. Considerado "el príncipe de las matemáticas" y "el matemático más grande desde la antigüedad", Gauss ha tenido una influencia notable en muchos campos de la matemática y de la ciencia, y es considerado uno de los matemáticos que más influencia ha tenido alrededor de la historia.

Fuente: E:\Carl Friedrich Gauss - Wikipedia, la enciclopedia libre.htm

Resolviendo el sistema de ecuaciones (1) por el método de igualación,

$$\begin{matrix} 2a + 4c = 1 & .(5) \\ a + 5c = 0 & .(-4) \end{matrix} \Rightarrow \text{ resulta:}$$

$$\begin{array}{r} 10a + 20c = 5 \\ -4a - 20c = 0 \\ \hline 6a = 5 \end{array} \Rightarrow \text{despejando } a \text{ queda} : a = \frac{5}{6}$$

Reemplazando el valor de **a** en una de las ecuaciones originales tendrás el valor de $c = \frac{1}{6}$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (2) por el mismo método:

$$\begin{matrix} 2b + 4d = 0 & .(5) \\ b + 5d = 1 & .(-4) \end{matrix} \Rightarrow \text{ tenemos :}$$

$$\begin{array}{r} 10b + 20d = 0 \\ -4b - 20d = -4 \\ \hline 6b = -4 \end{array} \Rightarrow \text{despejando } b \text{ queda} : b = \frac{-2}{3}$$

Reemplazando el valor de **b** en una de las ecuaciones originales obtendrás el valor de $d = \frac{1}{3}$

De esta manera tendrás el inverso de A o A^{-1}, por lo que la matriz $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Busca un lugar tranquilo para resolver estas propuestas en las que se involucren las operaciones básicas con matrices.

1. Calcula las matrices A y B que son soluciones del siguiente sistema:

$$3A + 2B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad 2A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Calcula los productos posibles entre las matrices.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\text{ y }C=\begin{pmatrix}2&1&0\\3&4&5\end{pmatrix}$$

3. Obtén las matrices X e Y que verifiquen los siguientes sistemas matriciales:

$$\text{a)}\begin{cases}X+Y=\begin{pmatrix}2&1\\3&0\end{pmatrix}\\X-Y=\begin{pmatrix}6&2\\0&1\end{pmatrix}\end{cases}\quad\text{b)}\begin{cases}3X+Y=\begin{pmatrix}3&8\\-3&2\end{pmatrix}\\X+Y=\begin{pmatrix}1&8\\0&1\end{pmatrix}\end{cases}\quad\text{c)}\begin{cases}2X+Y=\begin{pmatrix}3&1\\0&-2\end{pmatrix}\\X+2Y=\begin{pmatrix}1&0\\-2&4\end{pmatrix}\end{cases}$$

4. Resuelva la ecuación AX – B + C = 0, siendo:

$$A=\begin{pmatrix}4&1\\-1&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&2&0&-1\\-2&-1&1&0\end{pmatrix}\text{ y }C=\begin{pmatrix}0&-1&2&1\\1&0&-3&0\end{pmatrix}$$

5. Un fabricante de productos químicos posee 3 plantas. La producción en las dos últimas semanas esta consignada en la siguiente tabla

Semana 1	**Betún**	**Pegante**	**Cera**
Planta 1	3000	1600	1800
Planta 2	2000	1700	2500
Planta 3	1500	2500	4000

Semana 2	**Betún**	**Pegante**	**Cera**
Planta 1	1600	2000	3100
Planta 2	1700	2100	2600
Planta 3	1800	2200	1950

a) Determina una matriz A para la producción de la primera semana.

b) Determina una matriz B para la producción de la segunda semana.

c) Adiciona los datos respectivos por fila y columna de las tablas.

d) ¿Qué representa cada uno de los datos de la matriz A + B?

6. En una fábrica de artículos deportivos, la producción por hora en tres talleres está relacionada por la matriz:

Taller 1	8	6	13	17	17	40	37
Taller 2	9	5	15	24	25	41	32
Taller 3	7	11	21	32	16	42	35

a) A cada columna asígnale el nombre de un artículo deportivo.

b) Explica que representa la tercera columna de acuerdo al artículo que le asignaste.

c) ¿Cuál es la producción durante 5 horas en el taller dos?

d) ¿Cuál es la producción durante 6 horas en cada taller? Representa dicha producción como la matriz 6F

e) ¿qué indican las matrices 2F, 3F y 8F?

7) A un fabricante de ropa le han pedido 5 pantalones, 3 sacos, 12 camisas y 16 corbatas. El precio de cada pantalón es de $65, el de un saco $72, el de una camisa $ 44 y el de cada corbata $20.

a) Expresa mediante una matriz fila el pedido de ropa.

b) Expresa el precio unitario de la ropa en una matriz columna.

c) Utiliza el producto de matrices para calcular el dinero que recibe el fabricante

8) En una empresa, la cantidad de vehículos, por modelo, en cada ruta de transporte urbano, está indicado por la tabla T:

T	**Modelo A**	**Modelo B**	**Modelo C**	**Modelo D**
Ruta 1	4	7	4	2
Ruta 2	2	6	5	4
Ruta 3	1	2	5	8

En cada día de la semana, el consumo de galones de gasolina por modelo está indicado en la tabla G:

G	**Lunes**	**Martes**	**Miércoles**	**Jueves**	**Viernes**
Modelo A	**12**	**8**	**11**	**10**	**15**
Modelo B	**7**	**9**	**6**	**7**	**23**
Modelo C	**9**	**8**	**8**	**28**	**9**
Modelo D	**15**	**16**	**15**	**19**	**6**

a) Escriba las matrices T y G determinadas por las tablas.

b) Realiza el producto de T x G. Observa que al multiplicar la primera fila de T por la primera columna de G se obtiene: 4 x 12 + 7 x 7 + 4 x 9 + 2 x 15 = 163 que representa el consumo de gasolina el día lunes en la ruta 1

c) ¿Qué representa cada fila de la matriz T x G?

d) ¿cuál es el consumo de gasolina en la ruta 3 el día jueves?

A sumergirse en el mundo de los Determinantes

Has visto las matrices y su utilidad en la representación de situaciones concretas, ahora estudiarás a los determinantes.

Te preguntarás qué son los determinantes y para qué sirven, pues aquí te contamos.

El ***Determinante*** es un número asociado a una matriz cuadrada (orden n x n) formado por la suma de n productos. En cada producto interviene un elemento de cada fila y un elemento de cada columna. Es decir, el ***determinante*** de una matriz cuadrada es un número que se obtiene a partir de los elementos de la matriz.

Su estudio se justifica en cuanto que simplifica la resolución de sistemas lineales y el cálculo de la **matriz inversa**, entre otras aplicaciones. Generalmente se lo designa con la letra griega delta Δ. Dependiendo de que orden sea la matriz tendremos determinantes de segundo orden, de tercer orden o de orden superior a tres.

Determinantes de una matriz cuadrada de segundo orden

Dada una matriz de orden dos $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, se llama determinante de la matriz al número que se obtiene así: $a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}$. Es decir, de la diferencia del producto de los elementos de la diagonal principal y la diagonal secundaria.

Se representa $\det(A)$ ó $|A|$

Ejemplo 1: Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \det(A)$ = 3. 1 - (- 2). 4 = 3 – (-8) = 11

Ejemplo 2: Calcula el valor de x sabiendo que el determinante es 0, de la siguiente expresión matricial $\begin{pmatrix} x & x+2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

De acuerdo a la definición estudiada, calculamos el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & x+2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 7x - 5(x+2) = 0$$

Aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación

$$7x - 5x - 10 = 0$$

Restando términos semejantes y despejando la **x**

$$2x = 10$$

$$x = \frac{10}{2}$$

$$x = 5$$

Verificación; reemplaza el valor obtenido de **x** en la matriz original, sabiendo que el determinante es nulo, es decir, igual a cero.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 5+2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 5.7 - 5(5+2) = 35 - (25+10) = 0$$

se verifica que

$$35 - 35 = 0$$

$$0 = 0$$

Con ayuda de algunos compañeros, resuelvan los siguientes ejercicios

1) Sabiendo que |A| = 5, calcula los otros determinantes.

$$|A| = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \Delta B = \begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 3/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \Delta C = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$$

2) Calcula el valor de x en cada caso sabiendo que los determinantes son nulos.

a) $\begin{vmatrix} 2x & x-2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} x & 3x \\ 1 & 2x \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} x+3 & 5 \\ x & x \end{vmatrix}$

Determinante de una matriz cuadrada de tercer orden

Para hallar el determinante de una matriz de tercer orden existen varios procedimientos, enunciados por célebres matemáticos como el francés Pierre Sarrus (1798-1861) y Pierre Simón de Laplace (1749 – 1897). Aquí estudiaremos cada uno de ellos como estrategia para hallar determinantes.

Regla de Sarrus

Para calcular el determinante de una matriz de orden 3 se recurre al uso de la llamada ***Regla de Sarrus.***

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \\ -3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

Este determinante se obtiene de la suma de seis términos:

- **Tres positivos,** formados por los productos de tres factores: los tres elementos de la diagonal principal y los elementos de las dos líneas paralelas a esta diagonal, multiplicados por el vértice opuesto.

  $4 \cdot 1 \cdot 4 + 6 \cdot 7 \cdot 2 + (-3) \cdot 3 \cdot (-3)$

- **Tres negativos**, también constituidos por productos de tres factores: los tres elementos de la diagonal secundaria y los de las líneas paralelas a ella, multiplicados por el vértice opuesto.

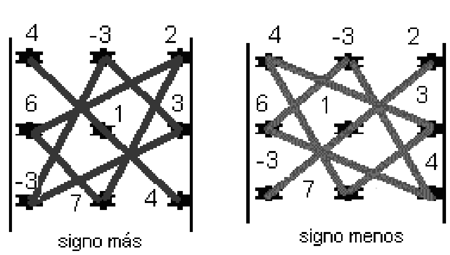
  $-2 \cdot 1 \cdot (-3) - 3 \cdot 7 \cdot 4 - (-3) \cdot 6 \cdot 4$

Así obtendrás

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \\ -3 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 \cdot 4 + 6 \cdot 7 \cdot 2 + (-3) \cdot 3 \cdot (-3) - 2 \cdot 1 \cdot (-3) - 3 \cdot 7 \cdot 4 - (-3) \cdot 6 \cdot 4$$

$$= 16 + 84 + 27 + 6 - 84 + 72 = 121$$

Esquemáticamente sería así



Es decir, dada una matriz:

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Definición de Laplace

Si tienes una matriz de orden tres se obtiene el determinante sacando cada elemento de la primera fila como factor común y multiplicando este factor por la matriz de orden dos que queda al descartar la fila y la columna de donde se toma el factor común; alternando los signos de los factores, comenzando por el signo más. Utiliza el mismo ejemplo que con la regla de Sarrus:

Ejemplo 1:

Calcula el determinante de la matriz A, siendo $A=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \\ -3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

Tendrás los elementos de la 1º fila que serán los factores comunes 4, - 3, 2; así

será :

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \\ -3 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$4(4-21)-3(24+9)+2(42+3) = -68-99+90 = 121$$

$$\det A = 121$$

Como habrás notado, cualquiera, sea el método utilizado sea la Regla de Sarros o la definición de Laplace, el resultado obtenido es el mismo.

Por lo tanto:

El determinante de una matriz cuadrada de tercer orden es igual a la suma de los productos de los elementos de una fila o columna cualquiera por los respectivos cofactores.

Llamamos cofactor a aquel elemento de la fila que se ha sacado como factor común.

Ejemplo 2.

Para la matriz A = $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, aplicando la regla de Laplace, eligiendo la tercera fila tenes:

$$\det(A) = 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$3.(-12-35) - 0\,(6-30) + 2\,(-14-24) = -141\ -76 = -217$$

Si hubiéses elegido otra fila o columna, por ejemplo la columna 3, quedaría:

$$\det(A) = 5.\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - (-3).\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 2.\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$5.(0-21) + 3\,(0-12) + 2.(-14-24) =$$

$$-105 - 36 - 76 = -217$$

Como observaste no interesa la columna elegida, el resultado será siempre el mismo.

Pon a prueba tus aprendizajes y resuelve cada una de estas matrices, utilizando la regla que se te indica. Luego verifica los resultados con tus compañeros.

1. Halla el determinante de las siguientes matrices, aplicando la regla de SARRUS

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 7 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -6 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

2. Calcula, desarrollando la fila o columna que tú elijas, el determinante de las matrices, aplicando la definición de LAPLACE.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

Antes de desarrollar el método siguiente, te comentare las **propiedades** más singulares de los determinantes. Las propiedades a **enunciar** son generales para determinantes de cualquier orden. Pueden comprobarse en los de orden dos o tres.

Propiedades:

1. El determinante no varía si se traspone la matriz. Es decir: **det A = det A^t.**

Ejemplo:

Si $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $A^t = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (4.2)-(3.7) = 12-21 = -9$$

$$\det A^t = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = (4.2)-(7.3) = 12-21 = -9$$, luego, det (A) = det (A^t)

2. Si todos los elementos de una fila (o columna) son nulos, el determinante también lo es.

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = (0.2.6)+(3.2.0)+(0.5.4)-(4.2.0)-(3.0.6)-(2.5.0) = 0$$

3. Si permutas dos filas o columnas el determinante cambia de signo

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & -5 \\ 3 & -2 & -8 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 91 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & -5 \\ 3 & -2 & -8 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -91$$

4. Un determinante con dos filas o columnas paralelas iguales es nulo.

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 5 \\ 7 & 6 & 4 \end{vmatrix} = (3.2.4)+(2.5.7)+(3.6.5)-(7.2.5)-(6.5.3)-(3.2.4)=0$$

5. Si un determinante tiene dos filas o columnas proporcionales su valor es nulo.

Ejemplo: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0,$ pues las dos primeras filas son proporcionales

6. Si multiplicas una fila o columna por un número, el determinante de la nueva matriz es igual al producto de ese número por el determinante de la matriz original

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -5.2 & 4.2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\det A = -35 - 12 = -47 \qquad \det B = -70 - 24 = -94$$

$$\det B = 2 . \det A = 2. (-47) = -94$$

Aplicaciones de los determinantes

Regla de Cramer

La regla de Cramer es un método para resolver, mediante el uso de determinantes, sistema de ecuaciones que contengan el mismo número de ecuaciones que de incógnitas. El procedimiento se explica para un sistema de ecuaciones de 2 x 2 (2 ecuaciones, 2 incógnitas) y de manera análoga se puede resolver cualquier sistema cuadrado de n x n.

Recuerda que un sistema de ecuaciones puede escribirse en forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c \\ f \end{vmatrix}$$

De acuerdo a la regla de Cramer, para obtener los valores de las incógnitas (x, y) se sigue este procedimiento, atendiendo el ejemplo:

“Un hotel tiene habitaciones con dos y tres camas. El total de habitaciones es 100 y el número de camas es de 253 ¿Cuántas habitaciones de cada clase hay?”

En la pregunta hay dos datos que no se conocen, el número de habitaciones con dos camas y el número de habitaciones con 3 camas. Aprendiste que las ecuaciones nos permiten calcular el valor desconocido asociándole una incógnita. Ahora lo que ocurre es que se necesitan dos ecuaciones. Utiliza la siguiente denominación:

Número de habitaciones con 2 camas "x"

Número de habitaciones con 3 camas "y"

Plantea las ecuaciones, teniendo muy bien en cuenta el enunciado del problema y analízalo. Te darás cuenta que la información relevante se puede separar en dos enunciados:

El total de habitaciones es 100

El número de camas es 253

Por tanto, nuestro sistema de ecuaciones quedará planteado de la siguiente manera

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 2x + 3y = 253 \end{cases}$$

Ahora simplemente queda resolverlo, aplicando la regla de Cramer. Para ello:

1. Se escriben las ecuaciones en forma matricial.

$$\begin{matrix} x + y = 100 \\ 2x + 3y = 253 \end{matrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 100 \\ 253 \end{vmatrix}$$

2. Se calcula el determinante de la matriz de los coeficientes al que llamaremos □

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (1).(3) - (2).(1) = 3 - 2 = 1$$

3. Se calcula el determinante de la matriz de los coeficientes, sustituyendo la primera columna por la matriz de los resultados, al que llamaremos Δx

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 100 & 1 \\ 253 & 3 \end{vmatrix} = (100)(3) - (253)(1) = 300 - 253 = 47$$

4. Se calcula el determinante de la matriz de los coeficientes, sustituyendo la segunda columna por la matriz de los resultados, al que llamaremos Δy

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 100 \\ 2 & 253 \end{vmatrix} = (1)(253) - (2)(100) = 253 - 200 = 53$$

5. Se calcula el valor de x, dividiendo Δx entre Δ

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} \rightarrow x = \frac{47}{1} = 47$$

6. Se calcula el valor de y, dividiendo Δy entre Δ.

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} \rightarrow y = \frac{53}{1} = 53$$

La solución es el par ordenado (47, 53), es decir, el número de habitaciones con 2 camas es de 47 y el número de habitaciones con 3 camas es 53.

Es importante que una vez que halles estos valores verifiques si cumplen o no con la igualdad en cualquiera de las ecuaciones originales.

Observa como se hace.

Reemplazando los valores encontrados en la primera ecuación $x + y = 100$

se tiene :

$$47 + 53 = 100$$

$$100 = 100$$

Por tanto, el valor obtenido cumple con la igualdad.

Utiliza la regla de CRAMER para resolver las propuestas presentadas.

1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones

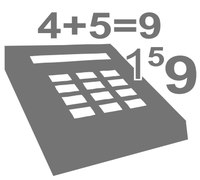
a) $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ x + 5y = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + y + 3z = -9 \\ 4x + 2y + 5z = -7 \\ -6x - 5y - z = -1 \end{cases}$

2. Analiza las siguientes situaciones problemáticas y resuélvelas.

a) Un moderno buque de turismo tiene camarotes dobles (dos camas) y simples (1 cama). Si se ofertan 65 camarotes que en total tienen 105 camas, averiguar el número de camarotes de cada tipo.

b) ¿Cuántos objetos tiene Aníbal y cuántos Bernardo sabiendo que si Bernardo le da a Aníbal 5 objetos, éste tiene el triple de los que le quedan a Bernardo y que ambos quedan con el mismo número de objetos si Aníbal le da a Bernardo 6 objetos?.

c) Halla las edades de dos personas sabiendo que la suma de las mismas es, actualmente, 50 años y que la razón entre las mismas era, hace 5 años, igual a 1/3.



¿Te gustaría iniciar este apartado de manera divertida? Pues adelante!!! A jugar se ha dicho. Invita a tus compañeros o amigos y pon en práctica tus habilidades de estratega.

BATALLA NAVAL

La batalla naval es un juego de estrategia en el que participan dos jugadores. Se juega con lápiz y papel, y no interviene el azar.

Preparación:

Antes de comenzar el juego, cada participante dibuja en un papel cuadriculado dos tableros cuadrados de 10 × 10 casillas. Las filas horizontales se numeran de la A hasta la J, y las columnas verticales del 1 al 10.

Basta con indicar las coordenadas de un disparo con un par letra/número (por ejemplo, A6 o J9).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A										
B										
C										
D										
E										
F										
G										
H										
I										
J										

Flota Propia

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A										
B										
C										
D										
E										
F										
G										
H										
I										
J										

Disparo

En el cuadrado de la izquierda se coloca la flota propia (se muestra un ejemplo). En el cuadrado de la derecha se irán marcando los disparos que el jugador efectúa en el mar del contrincante: barcos tocados, hundidos y disparos al agua.

La flota:

Cada jugador dispone en su tablero izquierdo una flota completa, sin que el contrincante vea su posición.

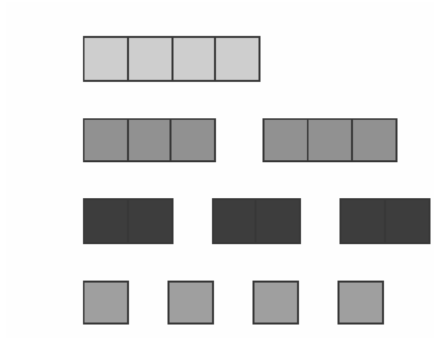
Los barcos no pueden tocarse entre si, es decir, que todo barco debe estar rodeado de agua o tocar un borde del tablero. La flota está formada por:

1 portaaviones (de cuatro cuadraditos);

2 acorazados (de tres cuadraditos);

3 buques (de dos cuadraditos);

4 submarinos (de un cuadradito).



Mecánica del juego:

- El turno pasa alternativamente de un jugador a otro.
- En su turno, el jugador hace un disparo a una posición del mar enemigo, indicando la coordenada correspondiente (letra y cifra). Si no hay barcos en ese cuadradito, el otro jugador dice: « ¡agua!»; si el disparo ha dado en algún barco dice: « ¡tocado!»; si con dicho disparo el rival logra completar todas las posiciones del barco, debe decir «¡hundido!» En el ejemplo, un primer disparo sobre H9 sería «agua»; sobre G5, «tocado», y sobre D7, «hundido».
- Gana el jugador que consigue hundir todos los barcos del rival.

Reflexiona: ¿qué habilidades te han requerido este juego? Podrías describir el clima en el que se desarrolló el juego con tus compañeros?

Coordenadas Rectangulares

Como ya te has dado cuenta, para el juego fue necesario tener la habilidad de saber ubicar coordenadas en el plano, es decir, de ubicarse en un espacio.

Esa misma necesidad de orientarse condujo a los seres humanos, desde la antigüedad, a confeccionar mapas o cartas geográficas y a relacionar los puntos de una superficie mediante números.

Para fijar una figura en el espacio o en un plano hace falta relacionarla con un sistema de referencia. En forma general se dice que la posición de un lugar cualquiera sobre la superficie de la tierra se identifica conociendo la latitud y longitud de ese lugar, esto es, un Sistema de Coordenadas.

En matemáticas, el sistema de referencia se forma sobre un plano con dos rectas perpendiculares que se interceptan en un punto, que se denota con la letra O.

Este sistema está formado por dos rectas o ejes, perpendiculares entre sí, que al interceptarse forman ángulos rectos y dividen al plano donde están contenidos en cuatro partes llamados cuadrantes, las cuales se enumeran en el sentido contrario de las manecillas del reloj.

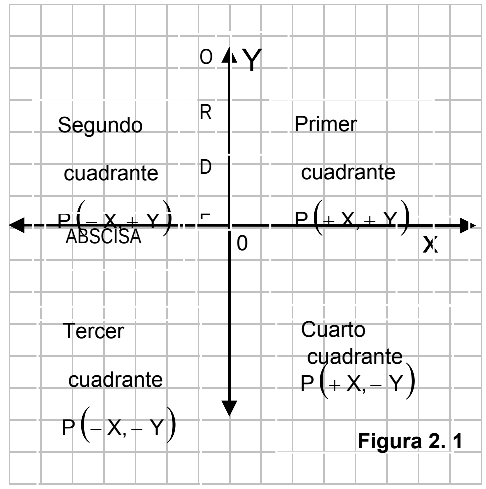


Figura 2. 1

Al eje horizontal se le llama *eje de las* ***X*** o simplemente ***abscisa*** (abscisa quiere decir "cortada") y al eje vertical se le llama *eje de las* ***Y*** **u** ***ordenada***.

Sobre los ***ejes*** se marcan divisiones que corresponden a *números reales*, siendo el ***cero*** el punto de intersección de dichos ejes llamado ***Origen,*** cuyas coordenadas son (0, 0). Las ***coordenadas*** de un punto ***P*** son ***P(X, Y)***, las cuales se anotan como parejas ordenadas dentro de un paréntesis y separadas por una coma.

Para la ubicación de un punto cualquiera en el plano se consideran las distancias a los ejes, que son sus ***Coordenadas***. Considerando que cada ***eje*** es una recta numérica que contienen todos los números reales, todos los números ***positivos*** están a la ***derecha*** y **arriba** del ***origen*** y los ***negativos*** a la ***izquierda*** y ***abajo*** del mismo ***origen***.

TEN EN CUENTA QUE…

Dos puntos definen una recta y que la distancia más corta entre dos puntos es una línea recta.

Distancia entre dos puntos en un plano

Para trabajar en este apartado es importante recordar que en un triángulo rectángulo, el lado mayor es el que está opuesto al ángulo recto y lo llamamos hipotenusa del triángulo.

Usaremos el teorema de Pitágoras para hallar la distancia entre los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2)

RECUERDA QUE…

El teorema de Pitágoras dice:

El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Consideremos la siguiente ilustración:

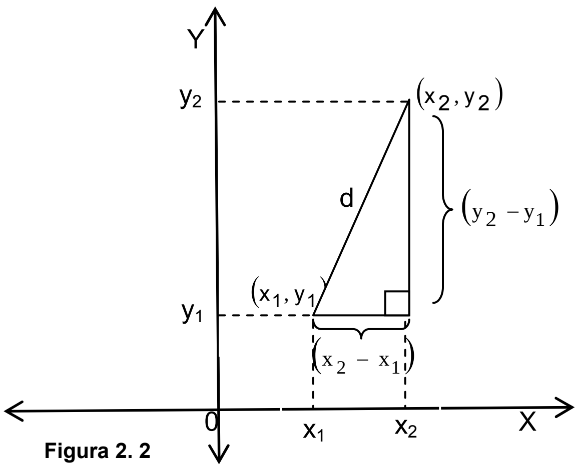


Figura 2. 2

Hemos representado dos puntos, (x_1, y_1) y (x_2, y_2) y además del segmento que los conecta, podemos ver otros dos segmentos que junto con el primero forman un triángulo rectángulo, siendo ***d*** el largo de la hipotenusa. Aplicando el teorema de Pitágoras a este triángulo obtenemos

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Como ***d*** es un número positivo, al sacar la raíz cuadrada a ambos lados de la

ecuación, obtenemos: $\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$

Ejemplo 1.

Determina la distancia entre los puntos $A(2, -3)$ y $B(-1, 1)$.

Las coordenadas del punto A son: $x_1 = 2$ e $y_1 = -3$; las de B son: $x_2 = -1$ e $y_2 = 1$

Por tanto, para ubicar el primer par de puntos A, debemos tomar dos unidades sobre el eje de las **x** positiva y tres unidades sobre el eje **y** negativo, como lo muestra la figura; el mismo procedimiento para ubicar el punto B, atendiendo los signos.

IMPORTANTE...

No olvides que los gráficos ayudan a comprender mejor las situaciones, además de comprobar el resultado.

Para trazarlos correctamente debes utilizar los instrumentos adecuados como: regla, compás, escuadra y transportador de ángulos.

Aplicando la fórmula, tenemos que la distancia entre los puntos A y B es

$$d = \sqrt{(-1-2)^2 + (1 - (-3))^2} = \sqrt{9+19} = \sqrt{25} = 5.$$

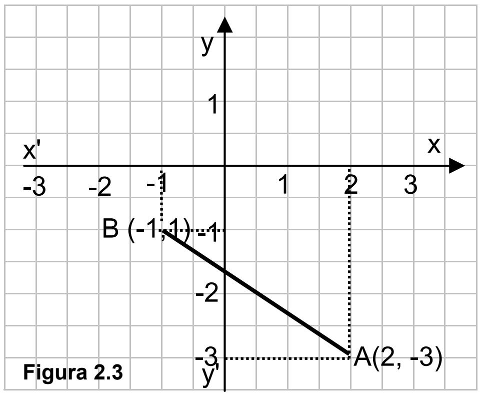


Figura 2.3

Ejemplo 2.

Demostrar que los puntos $A = (0,1)$ y $B = (3,5)$; $C = (7,2)$ y $D = (4,-2)$ son los vértices de un cuadrado.

Para demostrar lo que nos pide debemos hallar las distancias entre los distintos puntos de coordenadas, a fin de comprobar si realmente la figura es un cuadrado.

$\overline{AB} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

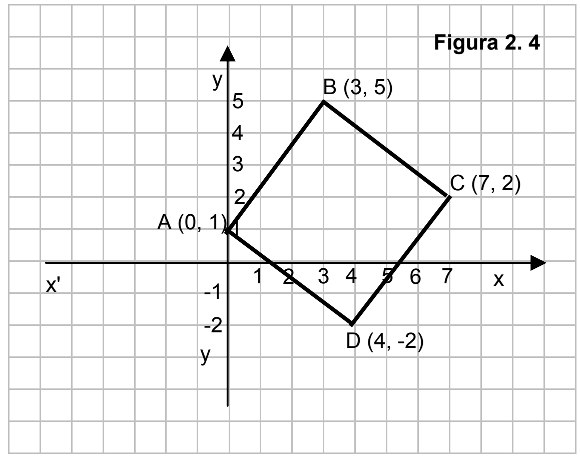
$\overline{BC} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

$\overline{AD} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

$\overline{CD} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

Como $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AD} = \overline{CD} = 5$, entonces ABCD es un cuadrado porque las longitudes de todos son iguales

Figura 2. 4



Como capitán de barco toma el timón y resuelve las situaciones problemáticas planteadas, aplica lo que has aprendido

1- La municipalidad tiene proyectado construir un jardín en el medio de una avenida principal, en forma de un triángulo. Los arquitectos han definido las coordenadas de dos vértices y solicitan que se les ayude en la determinación del tercer vértice de manera que el triángulo formado sea equilátero. Los puntos definidos son A (-1, 1) y B (3,1). ¿Le ayudas a hallar las coordenadas del tercer vértice?

2. Tres de los vértices de un paralelogramo son A (-1,4); B (1,-1) y C (6,1). Si la ordenada del cuarto vértice es 6. ¿Cuál es su abscisa?

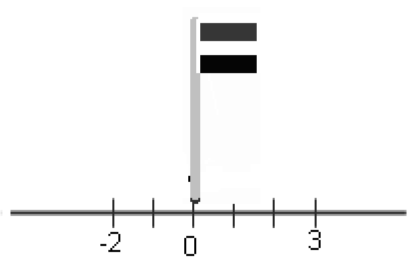
3. En una institución educativa el mástil de la bandera está ubicado en las coordenadas M (7,3) del patio, Otros dos están ubicados del primero en las coordenadas B (-5,2) y C (-8,1).Puedes determinar cuál es el más cercano al mástil principal.

¿Cómo hallar las Coordenadas del Punto Medio?

Analicemos esta situación que se plantea en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1:

Una pareja de “enamorados” que tienen problemas están en el patio cívico de una escuela cada quién por su lado.

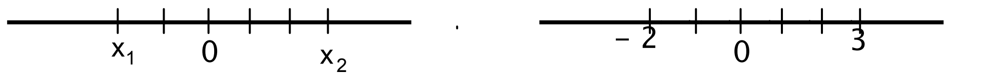


Él está a 3 m del asta de la bandera y ella está a 2 m del asta en la dirección contraria. Una amiga de ambos que los estima por igual desea ayudarlos a resolver sus problemas, así que se coloca exactamente en el punto medio entre los dos y los llama para conversar. ***¿Cuál es la coordenada del punto medio?***

Una forma práctica de resolver este problema es contando los segmentos. Sin embargo, podríamos establecer una regla que nos permita hallar el Punto Medio.

En primer lugar vamos a considerar que el punto medio de cualquier segmento es la distancia entre los puntos que lo contiene divido dos, es decir, la semisuma de la distancia existente entre dichos puntos. Por lo tanto la regla práctica quedaría definida de la siguiente manera: ***“Coordenada inicial más la Coordenada final, dividido entre 2"***

Pero ¿cuál es la coordenada inicial? ¿Y cuál es la coordenada final? Podríamos elegir cualquiera de ellos.



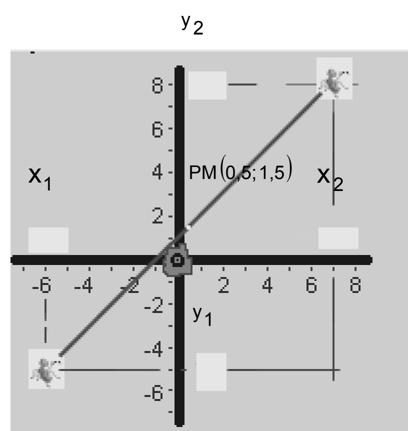
Entonces, $PM = \frac{x_1 + x_2}{2}$ sustituyendo datos quedaría: $PM = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

Por lo tanto la Coordenada del Punto Medio entre los dos "desenamorados" es: (0.5).

Ejemplo 2.

Dos hormiguitas salen de su residencia (un agujero) y se disponen a tomar el Sol. Se colocan a unos cuantos centímetros de él (agujero), tal como se muestra en la figura. Una tercera hormiguita no quiere alejarse mucho de su "casa" y se acomoda exactamente en el punto medio de la recta que se forma con las otras dos. ¿Cuáles son las coordenadas del dichoso lugar (Punto medio) en donde se colocó la última hormiguita?

Evidentemente el agujero es el punto de referencia, por lo tanto ahí colocaremos nuestro punto de origen de un Sistema de Coordenadas Cartesianas.



Dos hormiguitas tomando sol. Coordenadas H₁ (-6,-5); H₂ (7,8)

Proyectando los catetos del triángulo rectángulo que se forma hacia sus respectivos ejes simplemente calculamos el ***Punto Medio*** para cada caso.

Aplicando la regla que establecimos en el ejemplo anterior:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-6+7}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Procediendo de la misma forma para obtener la **x**, obtenemos **y**:

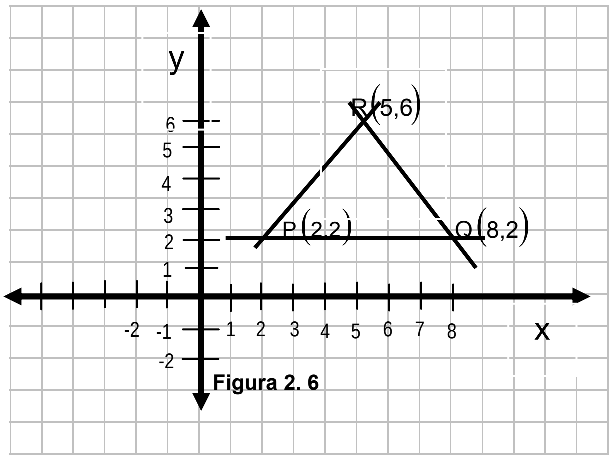
$Y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-5+8}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$. Por lo tanto, las coordenadas del ***punto medio*** son (**0,5; 1,5),** como lo vemos en la gráfica 2.5.

Por tanto, la fórmula para hallar el punto medio de un segmento para las coordenadas de **x** es $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ **,** y para las coordenadas de **y** es $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$

Área de un polígono convexo en función de las coordenadas de sus vértices

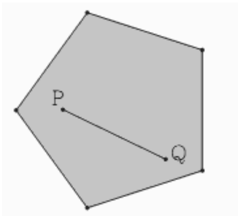
Para iniciar este apartado te proponemos realizar la siguiente actividad

Ubica los puntos $P(2,2); Q(8,2); R(5,6)$ en un sistema coordenado cartesiano, únelos por medio de rectas y calcula el área del triángulo que se forma.



RECUERDA QUE...

Un polígono es convexo cuando se toman dos puntos P, Q cualesquiera, el segmento PQ también está en el polígono. En todo polígono convexo todos sus ángulos internos miden menor de 180°



Solución.

Determinemos la longitud de sus tres lados, calculando la distancia entre los vértices, por lo tanto:

1. Distancia entre los puntos P (2, 2); Q (8, 2), queda:

$d = \sqrt{(2-8)^2 + (2-2)^2} = 6$, que es la base del triángulo.

2. Distancia entre los puntos Q (8,2); R (5,6). Sustituyendo coordenadas queda: $d = \sqrt{(8-5)^2 + (2-6)^2} = 5$

3. Distancia entre los puntos R (5,6); P (2, 2).Sustituyendo coordenadas queda:

$$d = \sqrt{(5-2)^2 + (6-2)^2} = 5$$

RECUERDA QUE...

El área del triángulo se obtiene por medio de la siguiente fórmula $A_\Delta = \frac{b \times h}{2}$. Donde A es el área, b es la base y h es la altura.

Considerando los resultados obtenidos vemos que dos de los lados tienen medidas iguales. Por tanto, se trata de un **triángulo isósceles.**

> TEN EN CUENTA QUE...
>
> El orden en que deben considerarse los vértices debe seguir el sentido antihorario, es decir contrarias a las manecillas del reloj, iniciando por cualquiera de ellos

Como veraz para calcular la altura (h), simplemente hay que determinar las coordenadas del punto medio de la base del triángulo y luego calcular la distancia desde el punto medio hasta el vértice superior. Los puntos que conforman el segmento del cual ha de determinarse el Punto Medio son P (2, 2); Q (8, 2).

Sustituyendo datos queda:… $X = \frac{(2+8)}{2} = 5$, e $Y = \frac{(2+2)}{2} = 2$. Por lo tanto, las coordenadas del punto medio son (5,2)

Calculando la distancia entre el punto medio **(5, 2)** y el punto **R (5,6)**, tendremos que: $d = \sqrt{(5-5)^2 + (2-6)^2} = 4$

Sustituyendo los resultados obtenidos en la fórmula del área tenemos que:

$$A = \frac{6\,.\,4}{2} = 12 \text{ unidades cuadradas}$$

Otra forma de determinar el área del triángulo por medio de las coordenadas de sus vértices es aplicando la fórmula siguiente:

$$A = \frac{1}{2}\left(x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_1 y_3 - x_3 y_2 - x_2 y_1\right)$$

Sustituyendo las coordenadas correspondientes,

$$A = \frac{1}{2}\left(2.2 + 8.6 + 5.2 - 2.6 - 5.2 - 8.2\right) =$$

$$A = \frac{1}{2}\left(4 + 48 + 10 - 12 - 10 - 16\right) =$$

$$A = \frac{1}{2}.24 = \frac{24}{2} = 12 \text{ unidades cuadradas.}$$

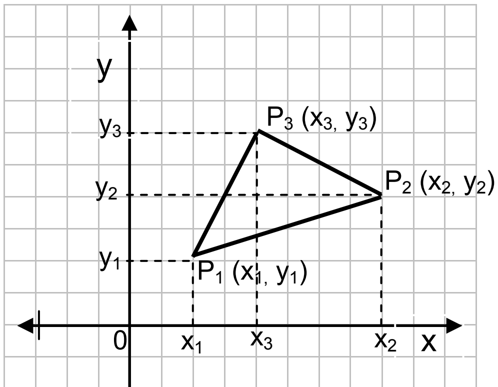


Figura 2. 7

Por tanto, el área del triángulo es igual a 12 unidades cuadradas

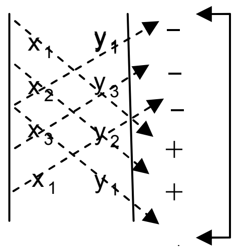
Comparando los resultados veras que son exactamente iguales. ¿Cuál de los procedimientos te gusta más? Utiliza aquel que te resulte más práctico y comprensible para ti.

Esta misma ecuación podemos expresarlo utilizando la notación de determinante

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Entonces calcular el área de cualquier polígono convexo podemos utilizar determinantes. ¿Cómo? Te preguntarás, aquí te mostramos.

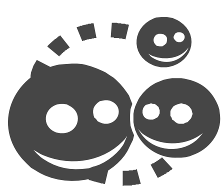
2A =



Observa que la primera fila se repite en la cuarta fila.

Para el problema anterior sería $2A = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 8 & 2 \\ 5 & 6 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} =$

$$2A = .2.2 + 8.6 + 5.2 - 8.2 - 5.2 - 2.6 =$$
$$2A = 4 + 48 + 10 - 16 - 10 - 12 =$$
$$2A = 52 - 28 =$$
$$2A = 24$$
$$A = \frac{24}{2} = 12 \text{ unidades cuadradas}$$



Reúnete con algunos de tus compañeros que trabajan o viven más cerca de ti, analicen estas situaciones y resuélvanlas, compartiendo sus conocimientos.

1- Dibuja el triángulo de vértices **A** (1,-3), **B** (-3,5) y **C** (5,7), calcula las coordenadas de los puntos medios de cada uno de sus lados y ubícalos en un sistema de coordenadas.

2. El punto medio de cierto segmento es el punto P (-1,2) y uno de sus extremos es el punto Q (2,5). Hallar las coordenadas del otro extremo.

3. En el patio del Colegio Juan Pablo II se pretende construir, una pista rectangular para sus actividades culturales al aire libre. Las coordenadas de los vértices de la pista a construirse son (-4,1); (7,-4); (-4, -4) y (7,1). Determina el área que llegará a tener la referida pista.

La recta

Observa los siguientes ejemplos de ecuaciones

$y = x^2 + x + 1$ $\qquad$ $y = x + 3$

$y = x^3 + 5x^2 + x + 4$ $\qquad$ $y = (x^2 + x)x$

¿Qué tipo de ecuaciones son? Matemáticamente, ¿qué representan cada una de ellas?

Como verás son ecuaciones de primer, segundo, y más grados. Se les llama así por el exponente que tiene la variable independiente y por el resultado que muestran al graficarlas.

*S*i la ecuación es de primer grado siempre representa una ***recta.*** Es decir, las ecuaciones del tipo **y = mx + b** representan rectas en el plano. Sin embargo si la ecuación es de segundo grado siempre representa una ***curva***, igual si es de tercer grado.

Pero, ¿físicamente que representan las ecuaciones anteriores?

Físicamente pueden representar cualquier situación, como por ejemplo: la trayectoria de un vehículo durante cierto tiempo, un proceso físico que es proporcional (o sea que en la medida en que crece una cosa también crece otra), una trayectoria en la pantalla de un radar que simula a su vez el recorrido de un vehículo en el espacio, etc. Cualquier situación física que pueda relacionarse con una ***recta*** puede ser interpretada por medio de ella. Igual sucede con las ecuaciones de segundo grado, cualquier situación física pueda interpretarse matemáticamente por medio de una ***curva.***

Pendiente de una recta

Seguramente en muchas ocasiones has escuchado a personas hacer comentarios como estos: subí una cuesta que tenía mucha ***pendiente***; las escaleras que subí estaba muy inclinada, tenía mucha ***pendiente***; deje el auto estacionado y olvidé ponerle el freno de mano, de tal manera que cuando regresé lo encontré cien metros abajo hecho pedazos, es que el terreno tenía mucha ***pendiente***.

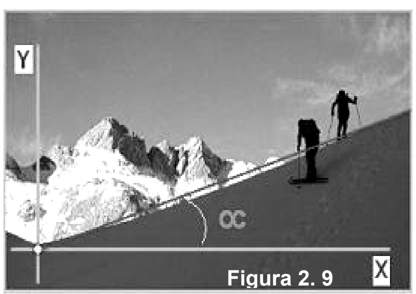


Figura 2. 9

¿Pero qué significa el término ***PENDIENTE***?

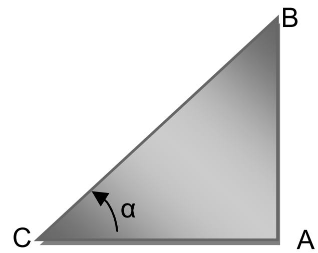
De acuerdo a lo visto arriba, la pendiente es una inclinación de algo, terreno, calles o una montaña, o una escalera, etc. Técnicamente para una recta se define como: ***la tangente de su ángulo de inclinación***.

Imaginemos esta situación: Unos jóvenes esquiadores decidieron pasar sus vacaciones en las montañas nevadas al sur de Suiza, ahí practican su deporte favorito, esquiar. Si quisiéramos determinar la pendiente de la montaña en el lugar donde nuestros jóvenes amigos están esquiando, esta sería la tangente del ángulo que forma la cuesta de la montaña con respecto a la superficie perfectamente horizontal.

Todo lo anterior matemáticamente se escribe: ***m = tg α***

Es decir, ***la pendiente (m) de una recta es igual a la tangente de su ángulo de inclinación (α).***

Sin embargo, existe otra relación matemática que define otra expresión para la tangente de un ángulo, esta si ya debes conocerla: $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$. ¿La recuerdas? En un triángulo rectángulo la tangente del ángulo formado por la hipotenusa y un cateto es igual al cateto opuesto divido el cateto adyacente.



Teniendo en cuenta esta relación veremos una fórmula que nos permita calcular la pendiente de una recta conociendo dos puntos. Es preciso recordar aquí aquella regla para calcular la distancia entre cualquier par de puntos, ***"coordenada final menos coordenada inicial"***.

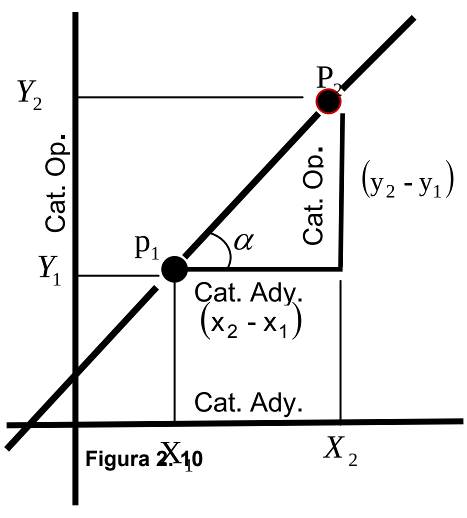


Figura 2.10

Para ello, dibujemos un triángulo rectángulo en un Sistema de Coordenadas Cartesianas. Ubicamos dos puntos **$P_1(X_1, Y_1)$** y **$P_2(X_2, Y_2)$** de la recta que contiene a la hipotenusa haciéndolos coincidir con sus dos puntos extremos.

Al analizar la figura y aplicando la regla ***"coordenada final menos coordenada inicial"*** obtenemos para el cateto opuesto proyectado al eje de las Y: $(y_2 - y_1)$ y para el cateto adyacente proyectado al eje de la X: $(x_2 - x_1)$, por lo que la expresión:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$,podemos escribirla como: $$\text{tag}\,\alpha = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$$

Y como ***tg α = m***; entonces ***m*** debe ser igual también a $\frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$ o sea: $\boxed{m = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}}$

que es la fórmula para hallar la pendiente de una recta, dados dos puntos de ella.

Ejemplo

Determina la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos A (3,1); B (-2,-1)

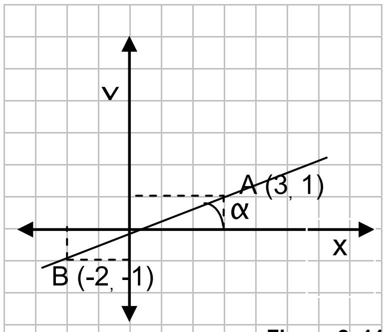


Figura 2. 11

En primer lugar debemos calcular la pendiente de la recta:

$$m = \text{tg}\,\alpha = \frac{(-1 - 1)}{(-2 - 3)} = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5}$$

Buscamos el ángulo para $\text{tg}\,\alpha = \frac{2}{5}$

Con ayuda de la calculadora podremos hallar la medida del ángulo, para ello

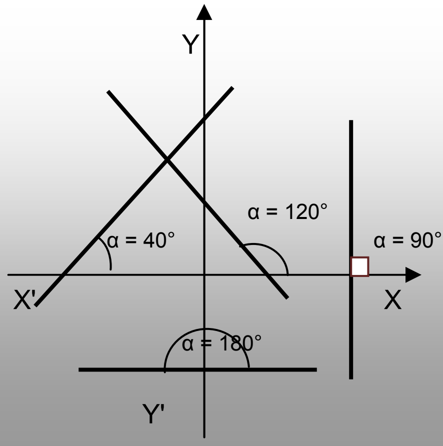
digitamos: SHIFT tan 2/5 aparece en el visor 21,8014949

luego SHIFT o ' " y aparece en el visor 21º 48' 05"

Por tanto, el ángulo de inclinación de la recta α = 21º48'05 → ángulo agudo.

ES IMPORTANTE TENER EN CUENTA QUE...

- Si la pendiente es positiva, su ángulo de inclinación es menor que 90°.
- Si la pendiente es negativa, su ángulo de inclinación es mayor que 90°.
- Si no existe (sale infinito) su ángulo de inclinación es 90°.
- Si es cero, tiene ángulo de inclinación de 0° y 180°.



Rectas paralelas y perpendiculares

Observa las siguientes ecuaciones $y = 2x - 1$; $y = 2x + 3$; $y = 2x + 7$

Como verás son de primer grado, por lo tanto representan rectas. De los valores que asignes a X (independientemente de cuáles sean) resultarán rectas similares a la gráfica. Al analizar la misma podemos concluir

¿Cómo obtenemos valores de "y"

Para la ecuación

Y = x + 3:

- Elegimos valores para x.
- Reemplazamos en la ecuación, el valor asignado a x y obtenemos:

x	y
-2	1
-1	2
0	3
1	4
2	5

- Que las rectas conservan la misma distancia una de otras, es decir, no se cruzan. Por lo tanto, son ***paralelas.***
- Que siendo rectas paralelas sus ángulos de inclinación son exactamente iguales con respecto al eje de las **X**, o si quieres respecto al eje de las **Y**.
- Por tanto, se concluye que las rectas paralelas tienen pendientes iguales, es decir: $m_1=m_2=m_3$ (m_1 = pendiente de la primera recta; m_2= pendiente de segunda recta ; m_3= pendiente de la tercera recta)

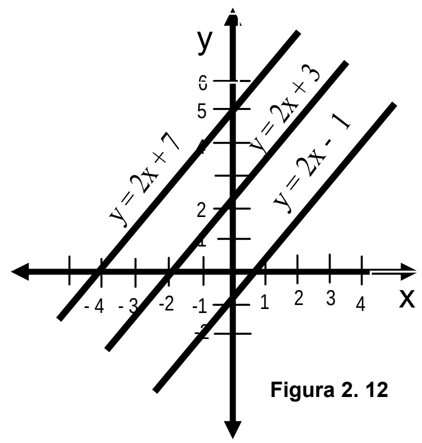


Figura 2. 12

Además podemos decir que en una ecuación que esté ordenada de la siguiente forma: y=5x+1, y=2x+10; y=-6x-2; etc., o más general: y = mx + b en donde ***b*** puede ser cualquier número incluso cero, ***el número que acompaña (coeficiente) a la x representa la pendiente de la recta***.

En estos casos, no habrá necesidad de realizar ningún cálculo para determinar la pendiente de una recta, simplemente con que la ordenes de la forma **y = mx+b** te darás cuenta de cual es su pendiente y su ángulo de inclinación, y además podrás conocer si dos o más rectas son paralelas.

Ejemplos:

a. Sea la ecuación 4x+2y=10 hallar la pendiente de la recta que representa.

Dividiendo toda la expresión entre dos, tenemos 2x+y=5.

Trasponiendo los términos queda y= - 2x+5

Por lo tanto la pendiente de la recta es -2. ¡¡¡Fácil!!!

b. Determinar si las siguientes ecuaciones representan rectas paralelas.

3x + y = 7
4y =-12x - 16

Despejando **y** de la primera ecuación queda:

$y = -3x + 7$ - - - - - - - - - - - (1)

Dividendo la segunda ecuación entre 4 que es el coeficiente de la **y** queda:

$$\frac{4y}{4} = \frac{(-12x - 16)}{4};$$
$$y = -3x - 4 \text{ - - - - - - - - - - - - - (2)}$$

Entonces comparando ambas ecuaciones (1) y (2) vemos que:

$y = -3x + 7$
$y = -3x - 4$; las rectas tienen pendientes iguales.
Por tanto, son ***paralelas***

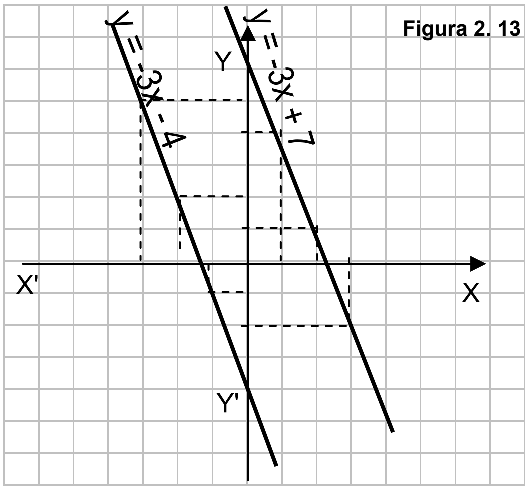


Figura 2. 13

Rectas perpendiculares

Como en el caso anterior iniciemos este apartado graficando las ecuaciones dadas $Y = -2x + 1;\ Y = \frac{1}{2}x - 3$.

Podrías realizar lo mismo con este par de ecuaciones $y = 3x + 4;\ y = -\frac{1}{2}x + 1$.

¿Qué observas en la gráfica? ¿Acaso las rectas se cruzan formando ángulos de 90º lo que significaría que son perpendiculares entre sí? ¿Puedes observar algo similar entre las ecuaciones?

Lo más seguro es que hayas llegado a concluir lo siguiente:

- Los coeficientes de X son inversos.
- Los coeficientes de X tienen signos contrarios.

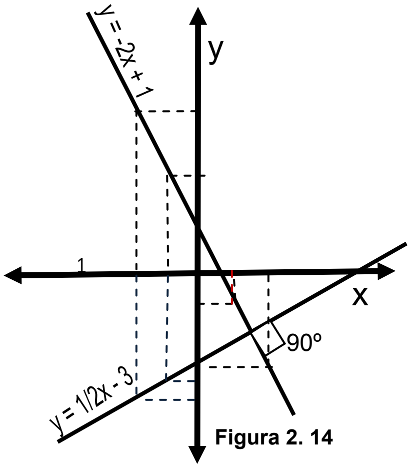


Figura 2. 14

Cuando las pendientes de dos rectas son recíprocas y de signos contrarios, ambas rectas son ***perpendiculares*** entre sí.

Dos ecuaciones de la forma $y = mx + b$ con coeficientes para x inversos y de signos contrarios, representan a dos rectas perpendiculares entre sí.

Ecuaciones de la recta

Según hemos visto, una recta es la representación gráfica de una ecuación de primer grado. Toda función de la forma y = mx + b, representa una línea recta. Es decir, las ecuaciones del tipo **y = mx + b** representan rectas en el plano. Esta ecuación es conocida como ***ecuación principal o explícita de la recta.***

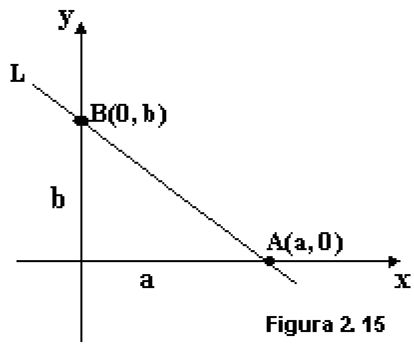


Figura 2. 15

En la ecuación principal de la recta **y = mx + b**, el valor de **m** corresponde a la pendiente de la recta y **b** es el coeficiente de posición.

La pendiente permite obtener el grado de inclinación que tiene una recta, mientras que el coeficiente de posición señala el punto en que la recta interceptará al eje ***y***.

Ejemplo: La ecuación y = 4x + 7 tiene pendiente 4 y coeficiente de posición 7, lo que indica que interceptará al eje y en el punto (0,7).

Si una ecuación de primer grado representa una recta entonces una ecuación de la forma, **Ax + By + C = o** también representa una recta. Esta expresión recibe el nombre de ***ecuación general o implícita de la recta***

En la ecuación general de la recta, la pendiente y el coeficiente de posición quedan determinados por:

$$m = \frac{-a}{b} \qquad b = \frac{-c}{b}$$

Ejemplo:

¿Cuál es la pendiente y el coeficiente de posición de la recta 4x - 6y + 3 = 0?

Analizando la ecuación tenemos: a = 4; b= - 6 y c = 3. Aplicando directamente la fórmula dada:

$$m = \frac{-a}{b} = \frac{-4}{6} \qquad b = \frac{-c}{b} = \frac{-3}{-6}$$

$$m = -\frac{2}{3} \qquad b = \frac{1}{2}$$

Ahora si consideramos la recta L de la cual conocemos los interceptos a y b con los ejes x e y respectivamente (fig.2.5)

Como L pasa por los puntos A (a, 0) y B (0, b), entonces la ecuación de L viene dada $y - o = \frac{b-0}{0-a}(x-a)$. Es decir, $y = \frac{-b}{a}(x-a)$ de donde $\frac{b}{a}x + y = b$

Dividiendo esta última ecuación por b, se obtiene: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

Dividiendo esta última ecuación por b, se obtiene: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

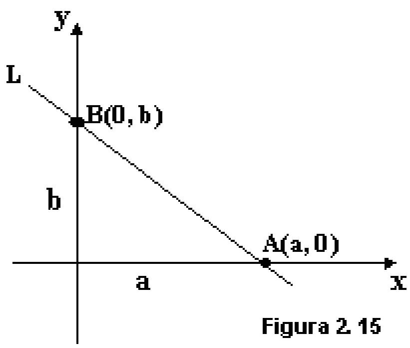


Figura 2. 15

Esta ecuación se conoce como ***ecuación segmentaria o canónica***. Los números a y b son los puntos en que la recta intercepta con cada eje.

a: punto de corte con el eje OX, coordenadas (a, 0)

b: punto de corte con el eje Oy, coordenadas (0, b)

Ejemplo:

Halla la ecuación de la recta segmentaria de la recta 2x – 3y + 6 = 0

1º Debemos conseguir igualar a 1, para ello pasamos el 6 al otro miembro y dividiendo todos los términos entre – 6.

2º La x y la y deben tener coeficientes igual a 1

$$\frac{2x}{-6}-\frac{3y}{-6}=\frac{-6}{-6}\Rightarrow -\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$$

Por tanto, la ecuación segmentaria de la recta 2x – 3y + 6 = 0 es $-\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$

Volviendo a $m=\frac{y-y_1}{x-x_1}$, que es la fórmula para hallar la pendiente de una recta, dados dos puntos de ella y trasponiendo los términos, es decir, pasando el divisor $(x-x_1)$ al otro miembro de la expresión tenemos: $m(x-x_1)=(y-y_1)$ o bien $(y-y_1)=m(x-x_1)$. A esta ecuación se la denomina ***ecuación punto – pendiente.***

Ejemplo:

Determina la ecuación de la recta que pasa por P (-2,3) y pendiente m = - 4

Veamos, los datos con que contamos son las coordenadas del punto P y la pendiente **m.**

Aplicando la fórmula y reemplazando los valores dados tenemos:

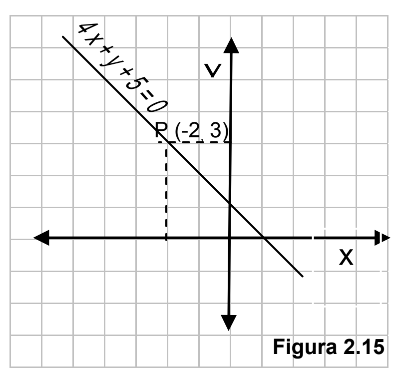


Figura 2.15

$(y - y_1) = m(x - x_1)$, $(y - 3) = -4(x + 2)$

Escribimos en forma implícita Ax + By + C = o $\rightarrow (y - 3) = -4(x + 2)$

$(y - 3) = -4x - 8 \rightarrow y - 3 + 4x + 8$

$\boxed{4x + y + 5 = 0}$ ecuación implícita

Ahora si tomamos dos puntos conocidos de una recta, $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y2)$, es posible determinar su ecuación.

Para ello tomemos un tercer punto R(x, y), también perteneciente a la recta.

Como P, Q y R pertenecen a la misma recta, se tiene que $\overline{PQ}$ y $\overline{PR}$ deben tener la misma pendiente. O sea

$$m_{\overline{PQ}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ y } m_{\overline{PR}} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Luego, $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$ *es* ***la ecuación de la recta que pasa por dos puntos***.

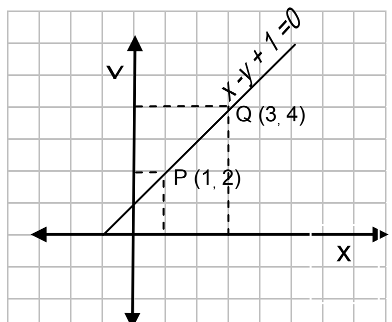


Figura 2. 16

Ejemplo: Determina la ecuación de la recta que pasa por los puntos P (1,2) y Q (3,4).

Reemplazamos las coordenadas del punto P y del punto Q en la fórmula y tenemos:

$$\frac{y - 2}{x - 1} = \frac{4 - 2}{3 - 1} \text{ resolviendo las operaciones indicadas}$$

$$\frac{y - 2}{x - 1} = \frac{2}{2} \rightarrow \frac{y - 2}{x - 1} = 1$$

Transponiendo los términos queda: $y - 2 = x - 1$

Ordenando tenemos la ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q es $\boxed{x - y + 1 = 0}$

Distancia de un punto a una recta

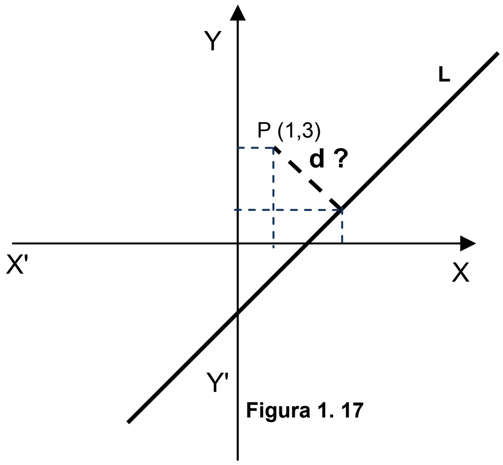


Figura 1. 17

Supongamos que tenemos una recta L cuya ecuación es y = x - 2 y un punto P fuera de ella, de coordenadas (1,3). ¿Cómo podríamos calcular la distancia entre el punto y la recta? ¿Tendríamos que aprender una fórmula más? No necesariamente, lo importante es razonar aunque las fórmulas ayudan mucho.

La distancia de un punto a una recta es la medida sobre una recta perpendicular a la anterior y que pase por el punto.

Como tenemos la ecuación de la recta, sabremos la pendiente de la recta (sea m esta pendiente), entonces la pendiente de las rectas perpendiculares a esta tendrán pendiente -1/m.

Para este caso la pendiente de la recta es m =1 y el de la perpendicular a esta será $m = -1$

Como además esa recta tiene que pasar por el punto que nos dicen, nos será muy fácil calcular la ecuación de esa recta.

Por tanto, la ecuación de la recta que es perpendicular a **L** y pasa por el punto **P s**erá

$$y - 3 = -1(x - 1)$$

$$y - 3 = -x + 1 \qquad \text{eliminando paréntesis}$$

$$x + y - 4 = 0 \qquad \text{ordenando los términos}$$

Ya tenemos entonces las ecuaciones de las dos rectas. Si resolvemos el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones de las dos rectas, obtendremos el punto en el que se cortan las rectas.

$$\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\overline{2x - 6 = 0}$$

$$x = 3$$

Reemplazamos el valor de x = 3 en la segunda ecuación para obtener el valor de y

$$x + y - 4 = 0$$

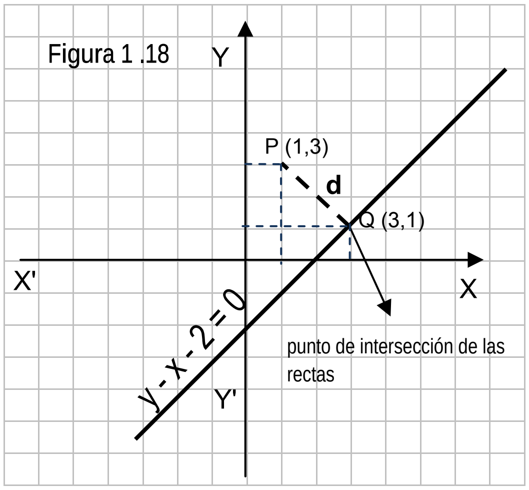
$$3 + y - 4 = 0$$

$$y = 4 - 3$$

$$y = 1$$

Por tanto, contamos con las coordenadas de dos puntos (uno el punto original y otro sobre la recta, este punto es el más cercano al primero) P (1,3) original y Q (3,1) sobre la recta.

Entonces al ubicar las coordenadas de los puntos podremos calcular la distancia.



$$d = \sqrt{(1-3)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{4+4}$$

$$\sqrt{8} = 2\sqrt{2} \rightarrow \text{distancia del punto P a la recta } y = x - 2$$

Hemos hallado así la distancia entre un punto y una recta, ahora te mostraremos la fórmula que también podrías utilizar para resolver cualquier cuestionamiento de este tipo.

La fórmula para hallar la distancia entre un punto y una recta es

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \text{donde A, B, C son las constantes de la recta } Ax + By + C = 0$$

x_0, y_0 son las coordenadas del punto P

Pues resolvamos el mismo ejemplo aplicando la fórmula dada.

Para ello tenemos las coordenadas del punto P (1,3) y la recta y = x – 2 , donde A =1, B = - 1 y C= -2. Reemplazando estos valores en la fórmula tenemos:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|1.1 - 1.3 - 2.|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|1 - 3 - 2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

racionalizando el denominador tenemos $d = \frac{4\sqrt{2}}{2}$

simplificando queda $d = 2\sqrt{2}$

RECUERDA QUE…

Se utiliza el signo del valor absoluto $|\;|$ por que las distancias no pueden ser negativas

La distancia de un punto a una recta es la longitud del segmento de la recta perpendicular trazado desde el punto a la recta. La expresión matemática para calcular dicha distancia es: $d = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$

Ha llegado el momento de poner en práctica todo lo aprendido. Demuestra que lo has logrado. Tu puedes!!!

1. Por inspección, calcula la pendiente y las intersecciones con los ejes coordenados de cada Recta representada por las ecuaciones siguientes:

1) $3x+6y=20$
2) $2x+7y-14=0$
3) $5x-6y-14=0$

2. Halla la pendiente "m" y el ángulo de inclinación α de las rectas determinadas por los pares puntos siguientes:

a) A (5, 2), B (9, 6)

b) C (-4, 2), D (-4, 7)

c) E (-6, 4), F (5, -8)

d) G (5, -9), H (10, -9)

Grafica cada una de ellas.

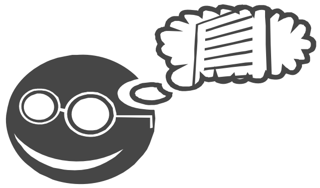
3. Halla la ecuación de la recta que pasa por el siguiente par de puntos (–7, 11), (1, 7). Traza la grafica

4. Halla la ecuación de la recta que pasa por el puntos: A (-3 1) y tenga una pendiente m = -2, gráfica.

5. Halla dos puntos de la recta $y = -3x + 4$ y calcula a partir de ellos su pendiente, y comprueba que es la que corresponde a esa ecuación. Grafica

6. Halla la distancia de Q (–3, 4) a la siguiente recta: $2x + 3y = 4$. Grafica

7. Calcula la distancia entre las rectas paralelas $x +2y +4 = 0$ y $2x + 4y -5 = 0$. Grafica



¿Cómo te pareció esta unidad? Estamos seguros que pusiste todo tu empeño para aprender y seguir adelante. Por eso te proponemos esta serie de ejercicios para que lo resuelvas y demuestres que has logrado comprender todos los procesos planteados en esta unidad.

1. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Halla la matriz traspuesta de A.

b) ¿Tiene la matriz C un nombre especial?

c) Calcular X, sabiendo que $A \cdot X + 2B - C = 0$

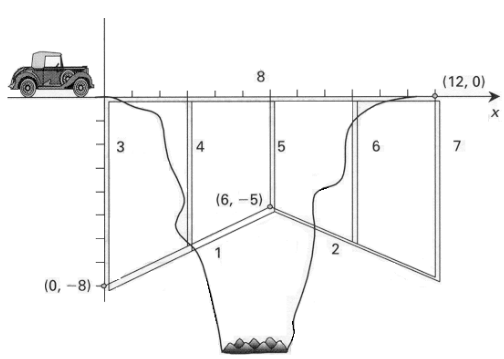
2. Halla las inversas de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. En una reunión hay 60 personas de estaturas altas, medias y bajas. Se sabe que entre las bajas y las medianas duplican el número de altas. También se sabe que las altas y el doble de las medianas son el doble de las bajas. ¿Cuál es el número de personas altas, medianas y bajas? Justifica la respuesta.

4. Halla la distancia del punto A (-2, -3) a la recta $8x + 15y - 24 = 0$.

5. Un ingeniero civil desea saber el material gastado en cierto puente, para ello necesita de tu ayuda. Determina la pendiente y la ecuación de cada una de las vigas que sostienen la estructura del puente y la longitud total de las vigas verticales.



6. Halla la ecuación de la recta que pasa a través de los puntos (1,-2) y (-4,5).Grafica

7. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto (3,4) y es paralela a la recta

$2x + 3y + 7 = 0$. Grafica

8. Demuestra que A (-3,-1), B (3,3) y C (-9,8) son los vértices de un triángulo rectángulo. Grafica

9. Hallar la ecuación de la recta perpendicular a la recta $2x + 5y + 8 = 0$ y que pasa por el punto (-1,-2). Grafica

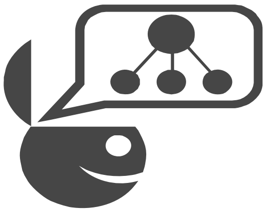
AUTOEVALUACIÓN

- Crea tu propio diccionario técnico.
- Relaciona lo aprendido con tu entorno y busca información acerca de donde se aplican matrices, determinantes, representaciones gráficas de lugares geométricos.
- Establece conjeturas y crea tus propias conclusiones.

CONTESTA objetivamente

¿Pudiste interpretar analítica y críticamente las informaciones proporcionadas?.

¿Qué contenidos dentro de la unidad fueron más fáciles y más difíciles?



Sobre todo los que has estudiado en esta unidad, ¿consideras que has logrado desarrollar algunas capacidades? ¿Los contenidos y las actividades propuestas te han sido claros? A partir de tu análisis ¿Consideras que lo que aprendiste te permitirán avanzar hacia otros conocimientos más complejos?

-Comparte tus respuestas en sesiones de tutor/a.

Pon en práctica tu creatividad y espíritu investigativo realizando las tareas aquí presentadas

- Crea tu propio diccionario de vocabulario técnico.
- Relaciona lo aprendido con tu entorno y busca información donde se aplican matrices, determinantes, representaciones gráficas de lugares geométricas.
- Establece conjeturas y crea tus propias conclusiones